

Modélisation Numérique de la Lubrification Thermohydrodynamique avec l'effet de couple de contraintes

Djamel Hammoudi^a, Sid Ali Boubendir^b, et Henda Kahalerras^a

a. University of Sciences and Technology Houari Boumediene (USTHB), FGMGP/LTPMP,
Bab Ezzouar, 16111, Algiers, Algeria – Algérie, djhammoudi@usthb.dz,
kahalerrashenda@yahoo.fr

b. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene [Alger] (USTHB) –
Algérie, boub_usthb@yahoo.fr

Résumé :

Ce travail présente une étude numérique de la lubrification hydrodynamique d'un palier lisse en tenant compte les effets thermiques, y compris les effets de couple de contraintes dus aux additives. La variation de la viscosité avec la température du film a été prise en compte. Le domaine étudié est représenté par le film lubrifiant, le coussinet et l'arbre rotatif. L'analyse inclut la solution des différentes équations thermohydrodynamiques telles que : l'équation de Reynolds modifiée, l'équation d'énergie tridimensionnelle et les équations de distribution de la vitesse dans le domaine du film lubrifiant, ainsi que l'équation du transfert de chaleur dans le coussinet et l'arbre pour des conditions appropriées au niveau des deux interfaces. En outre, la cavitation a été prise en compte en fonction de la condition au limite de Reynolds. Un code de calcul a été développé pour résoudre les équations précédentes par la méthode de différences finies. Il a été montré que les lubrifiants qui contiennent des additifs agissent comme des fluides non newtoniens. Il a été constaté que l'effet de couple de contraintes améliore la pression du film ainsi que la charge portante et réduit le coefficient de frottement.

Abstract:

This work presents a numerical study of hydrodynamic lubrication of a plain journal bearing with taking into account the thermal effects including couple stress effects due to lubricant additives. The viscosity variation with film-temperature was taken into account. The studied domain is represented by the lubricating film, the bush and the rotary shaft. The analysis includes the solution of the different thermohydrodynamic equations such as: modified Reynolds equation, three-dimensional energy equation and velocity distribution equations in the lubricating film domain, as well as the heat transfer equation in both the bush and the shaft with convenient conditions at the two interfaces. Also, the cavitation has been considered according to Reynolds boundary condition. A computer program has been developed to solve simultaneously the aforementioned equations using finite difference method. The obtained results of the developed code have been compared to that of the literature, a good agreement was shown. It has been shown that including lubricant with additives acts like a non-newtonian fluid. It has been found that the couple stress effect enhances the maximum oil pressure as well as the load capacity and reduces the friction coefficient.

Mots clefs : Palier lisse, Lubrification thermohydrodynamique, couple de contraintes, cavitation.

Nomenclature

B_i : Nombres de Biot [-]
 C : Jeux radial [m]
 C_f : Coefficient de frottement [-]
 C_p : Chaleur Spécifique [J/kg.°K]
 f : Nombre de frottement [-]
 e : Excentricité [m]
 F : Force de frottement [N]
 h : Epaisseur [m]
 h_i : Coefficient de transfert de chaleur [W/m².°K]
 k_i : Les coefficients de viscosité [-]
 l : paramètre de couple de contrainte [m]
 L : longueur du palier [m]
 N_d : Nombre dissipation [-]
 P : Pression [Pa]
 Pe : nombre de Peclet [-]
 R : Rayon [m]
 T : Température [°K]
 u, v, w : Vitesse suivant (x,y,z) respectivement [m/s].
 W : La charge [N]
 (x,y,z) : Les coordonnées cartésiennes [m]

Symboles Grecques

ε : Excentricité relative [-]
 Θ : Coordonnée angulaire [rad]
 Φ : L'angle de calage [rad]
 ω : Vitesse angulaire de l'arbre [rad/s]
 ρ : Masse volumique [kg/m³]
 μ : Viscosité dynamique [kg/m.s]
 η : Constante qui caractérise les effets de couple de contraintes [-]
 Ξ : Dissipation visqueuses [W/m³]
 λ_i : Conductivité thermique [W/m.K]
 γ, η_1, η_2 : Rapports adimensionnels [-]

Indices

$\bar{\quad}$: Les paramètres sans dimension
 0 : Constantes de référence
 a : Arbre
 c : Coussinet
 e : Surface externe du coussinet
 f : Fluide
 eff : Effective
 r : Rupture

1 Introduction

L'analyse thermohydrodynamique étudie la performance des paliers en tenant compte les effets thermiques dans le processus de lubrification. Aussi, avec le développement de l'industrie moderne, l'utilisation de différents fluides non-Newtoniens, même l'utilisation de fluides complexes, devient de plus en plus importante. Par exemple, les fluides polymères peuvent être utilisés comme lubrifiants moins dépendants de la température. L'utilisation de fluides polymères comme lubrifiants nécessite des études théoriques et expérimentales pour de meilleurs avantages économiques des lubrifiants. Pour l'investigation théorique avec des fluides complexes, l'analyse implique une complexité mathématique. En résumé, on peut mentionner que l'approche classique néglige la taille des particules de fluide pour décrire l'écoulement de fluides. D'autre part, la mécanique des milieux micro-continus des fluides explique le mouvement intrinsèque des particules pour décrire l'écoulement de fluides complexes. Ainsi, la mécanique classique des milieux continus des fluides est généralisée par la théorie des fluides non polaire, théorie qui est caractérisée par la contrainte de Cauchy. D'autre part, la mécanique classique des fluides est généralisée par la théorie des fluides polymères complexes, théorie qui est caractérisée par la contrainte de Cauchy ainsi que par le couple de contraintes. Afin de décrire l'écoulement des fluides complexes, Stokes [1] a élaboré une théorie particulière connue sous le nom de théorie de fluides à couple de contraintes. Depuis lors, le modèle de couple de contraintes a été largement utilisé dans la lubrification. Lin [2] a étudié les caractéristiques d'un palier à longueur finie en considérant que le lubrifiant est un fluide incompressible avec un couple de contraintes. Les résultats ont montré que les effets de couple de contraintes fournissent plus de temps pour éviter le contact arbre-coussinet et allongent la durée de vie du palier. Das [3] a fait une étude théorique sur les paliers lisses lubrifiés avec un fluide à couple de contraintes dans un champ magnétique. Il a été observé que la charge maximale augmente avec l'augmentation des paramètres de couple de contraintes et le nombre magnétique. Wang et al. [4] ont étudié la performance des paliers lubrifié avec fluides à couple de contraintes en tenant compte les effets thermiques. Une amélioration des performances des paliers a été constaté. Boubendir et al. [4] ont étudié l'effet des additifs sur le comportement hydrodynamique des paliers poreux. Ils ont constaté que les additives améliorent les performances des paliers poreux et non-poreux. Cependant, les études précédentes ne tiennent pas compte les effets thermiques, sauf le travail de Wang et al. [5]. Afin de combler cette lacune, ce travail présente une étude théorique de la lubrification hydrodynamique avec un fluide à couple de contraintes en tenant compte les effets thermiques. En se basant sur la théorie classique des fluides à couple de contraintes [1], une équation d'énergie modifiée a été d'abord élaborée. Ensuite, cette équation, ainsi que l'équation de transfert de chaleur et l'équation de Reynolds modifiée, sont résolues numériquement. Les effets de paramètre de couple contraintes sur le champ de pression, la capacité de charge et le coefficient de frottement sont étudiés.

2 Le Modèle physique

La section médiane d'un palier lisse est présentée dans la Figure 1. Le palier considéré est constitué d'un arbre tournant avec une vitesse constante U et un coussinet d'une longueur finie. Les deux éléments sont séparés par un film lubrifiant contenant des additives polymères.

L'épaisseur de film lubrifiant est donnée par la formule suivante :

$$h = C + e \cos(\theta) \quad (1)$$

Où : $C=R_c-R_a$ (Le jeux radial) et e est l'excentricité O_cO_a .

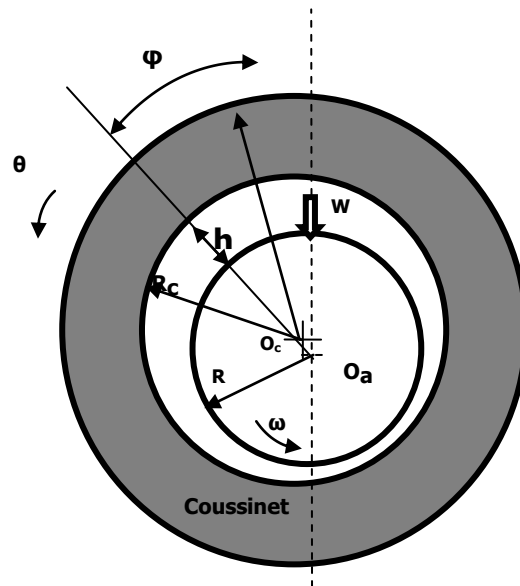


Figure .1. Coupe médiane d'un palier lisse

3 Formulation mathématique

Pour le cas d'un palier lisse, l'écoulement de fluide est régi par l'équation des films minces visqueux, qui est définie par l'équation de Reynolds. L'analyse inclut la solution de différentes équations thermohydrodynamiques telles que : l'équation de Reynolds modifiée, équation d'énergie, et les équations de transferts de chaleurs dans l'arbre et le coussinet avec des conditions aux limites adéquates au niveau des deux interfaces.

Le modèle mathématique est basé sur quelques hypothèses simplificatrices. Le régime hydrodynamique est supposé établi et l'écoulement est laminaire. Le fluide est considéré incompressible.

3.1 Equation de Reynolds modifiée

Basé sur la théorie des fluides à couple de contraintes de Stokes [1], et en négligeant les forces d'inertie et les couples de forces, l'équation de Reynolds modifiée sous la forme adimensionnelle est donnée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{F}(h, l)}{\bar{\mu}_m} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{F}(h, l)}{\bar{\mu}_m} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \right) = 6 \frac{d\bar{H}}{d\theta} \quad (2)$$

Les grandeurs adimensionnelles sont présentées comme suit :

$$P = \bar{P} \mu_0 \omega (R_a R_c / C^2), \quad \bar{R} = R / R_c, \quad \bar{H} = h / C, \quad \bar{l} = l / C, \quad \bar{C} = C / R_c, \quad x = R_c \theta, \\ y = \bar{y} H, \quad \bar{\mu} = \mu / \mu_0, \quad z = L \bar{z}, \quad (u, v, w) = \omega R_a (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}), \quad \gamma = R_c / L.$$

$$\text{Où : } \bar{F}(h, l) = \bar{H}^3 - 12 \bar{l}^2 \bar{H} + 24 \bar{l}^3 \tanh(\bar{H} / 2\bar{l})$$

$\bar{\mu}_m$: c' est la viscosité moyennée le long de l'épaisseur.

Avec : $l = \sqrt{\eta/\mu}$ tel que : η caractérise les effets de couple de contraintes, et l est le paramètre de couple de contraintes.

La forme adimensionnelle des composantes de vitesses est donnée comme suit :

$$\bar{u} = \bar{y} + \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \left\{ \bar{H}^2 \bar{y}(\bar{y} - 1) + 2\bar{l}^2 \left(1 - \frac{\cosh((2\bar{H}\bar{y} - \bar{H})/2\bar{l})}{\cosh(\bar{H}/2\bar{l})} \right) \right\} \quad (3)$$

$$\bar{w} = (\gamma) \frac{1}{2\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \left\{ \bar{H}^2 \bar{y}(\bar{y} - 1) + 2\bar{l}^2 \left(1 - \frac{\cosh((2\bar{H}\bar{y} - \bar{H})/2\bar{l})}{\cosh(\bar{H}/2\bar{l})} \right) \right\} \quad (4)$$

$$\bar{v} = -\bar{H} \bar{C} \int_0^{\bar{y}} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} - \frac{\bar{\xi}}{\bar{H}} \frac{d\bar{H}}{d\theta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\xi}} + \gamma \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right] d\bar{\xi} \quad (5)$$

3.2 Equation de l'énergie dans le film

Pour un écoulement permanent et laminaire d'un fluide à couple de contraintes incompressible dont sa conductivité thermique est considérée constante, l'équation d'énergie s'écrit comme :

$$P_e \left[\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} - \frac{\bar{y}}{\bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\bar{v}}{\bar{H} \bar{C}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} + \gamma \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right] = \frac{1}{\bar{H}^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\bar{\mu}}{\bar{H}^2} N_d \bar{\Xi} \quad (6)$$

Où :

$$P_e = \frac{\rho_0 c_{f0} U C^2}{\lambda_0 R_c} \quad \text{et} \quad N_d = \frac{\mu_0 U^2}{\lambda_0 T_0}$$

$$\bar{\Xi} = \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \left(\frac{\bar{l}^2}{\bar{H}^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} \right) \right]$$

3.3 Equations de transfert de chaleur dans l'arbre et le coussinet

La distribution de la température dans l'arbre et le coussinet est donnée par l'équation de transfert de chaleur. L'équation adimensionnelle de transfert thermique dans le coussinet est donnée comme suit :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} + \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (7)$$

En supposant l'arbre tourne rapidement ($\partial \bar{T} / \partial \theta = 0$) (Dowson [6]), l'équation de transfert de chaleur dans l'arbre est :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad (8)$$

3.4 La Lois de l'évolution de la viscosité

La variation de viscosité de lubrifiant en fonction de la température peut être représentée par l'équation suivante [7] :

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} = k_0 - k_1 \bar{T} + k_2 \bar{T}^2$$

Où : μ_0 c'est la viscosité de lubrifiant à la température de référence.

k_i sont les coefficients de viscosité.

Tel que : $k_0 = 3.287$, $k_1 = 3.064$, $k_2 = 0.777$.

4 Les conditions aux limites

4.1 La pression

$$\bar{P}(\theta, 0) = \bar{P}(\theta, 1) = P_0 \quad (9)$$

$$\bar{P}(\theta_r, \bar{z}) = \left. \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right|_{\theta_r} = 0 \quad (10)$$

Cette dernière, c'est la condition de Swift- Stieber, dite « condition de Reynolds ».

Avec : P_0 est la pression d'alimentation.

Où : θ_r représente la position de rupture de film.

4.2 Les vitesses

$$\bar{u}|_{\bar{y}=1} = 1, \quad \bar{v}|_{\bar{y}=1} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta}, \quad \bar{w}|_{\bar{y}=1} = 0 \quad (11)$$

$$\bar{u}|_{\bar{y}=0} = \bar{v}|_{\bar{y}=0} = \bar{w}|_{\bar{y}=0} = 0 \quad (12)$$

4.3 La température

Les conditions aux limites appliquées sur les surfaces externes et à l'interface film-solide sont données par :

$$-\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} \right|_{\bar{R}=\eta_1} = -Bi_{cr} (\bar{T}|_{\bar{R}=\eta_1} - \bar{T}_\infty) \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} \right|_{\bar{R}=1} = \frac{\lambda_{eff}}{\lambda_c} \frac{R_c}{H} \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=\pm 0,1} = -Bi_{cz} (\bar{T}|_{\bar{z}=0,1} - \bar{T}_\infty) \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} \right|_{\bar{R}=\eta_2} = -\frac{\lambda_f}{\lambda_a} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\bar{C}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\bar{H}} \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=1} d\theta \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=\pm 0,1} = -Bi_{az} (\bar{T}|_{\bar{z}=0,1} - \bar{T}_\infty) \quad (17)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{eff} = \lambda_f \rightarrow \text{Dans la zone active} \\ \lambda_{eff} = (\lambda_f + \lambda_{air})/2 \rightarrow \text{Dans la zone de cavitation} \end{array} \right.$$

$$\eta_1 = R_e/R_c \quad \eta_2 = R_a/R_c$$

$$Bi_{cr} = h_c R_c / \lambda_c, \quad Bi_{cz} = h_c L / \lambda_c, \quad Bi_{ar} = h_a R_a / \lambda_a, \quad Bi_{az} = h_a L / \lambda_a$$

Où λ_i représente la conductivité thermique de l'arbre, du coussinet et du fluide.

5 Les caractéristiques du palier

La charge portante sous la forme adimensionnelle est calculée sur la base de l'intégration de la pression adimensionnelle elle donnée par :

$$\bar{W} = \sqrt{\bar{W}_1^2 + \bar{W}_2^2} \quad (18)$$

Où :

$$\bar{W}_1 = \bar{W} \cos \varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{P} \cos \varphi \, d\theta \, d\bar{z} \quad (19)$$

$$\bar{W}_2 = -\bar{W} \sin \varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{P} \sin \varphi \, d\theta \, d\bar{z} \quad (20)$$

L'angle de calage est donné comme suit :

$$\tan \varphi = \frac{\bar{W}_z}{\bar{W}_x} \quad (21)$$

La force de frottement et le coefficient de frottement sont donnés comme suit :

$$F = \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{2\pi} \tau(y=h) R \, d\theta \, dz \quad (22)$$

$$C_f = f \left(\frac{R}{C} \right) = \frac{F}{W} \left(\frac{R}{C} \right) \quad (23)$$

Où : τ est la contrainte de cisaillement.

6 Procédure Numérique

Dans cette étude, la méthode des différences finies a été utilisée pour résoudre les différentes équations aux dérivés partielles. Le système est résolu itérativement par la méthode de Gauss-Seidel avec sous-relaxation. La zone de cavitation est déterminée par l'algorithme de Christopherson [8]. Pour atteindre la solution finale, un champ initial de pression et de viscosité est supposé, puis, le champ de vitesse est calculé. Après, l'équation d'énergie avec les équations de transfert de chaleur de l'arbre et de coussinet sont résolus simultanément. Un nouveau champ de viscosité est calculé, puis, l'équation de Reynolds modifiée est résolue en se basant sur la viscosité moyennée transversalement. Le critère de convergence est basé sur l'erreur relative. Après une étude de sensibilité sur ce dernier, l'erreur relative maximale optimale est : 10^{-6} pour la pression et 5×10^{-4} pour la viscosité.

7 Résultats et interprétations

Les données utilisées dans cette étude sont présentées dans le Tableau 1.

Table 1 : Les données utilisées dans la présente étude

Paramètre	Valeur
Excentricité relative, $\varepsilon = e/C$, (-)	De 0.1 à 0.8
Coefficient de couple de contraintes, l (-)	De 0 à 0.2

Rayon interne du coussinet, R_c (mm)	50
Rapport géométrique $\gamma - \eta_1$ (-)	0.5 - 2
Les Nombres de Biot : $Bi_{cr} - Bi_{cz} - Bi_{ar} - Bi_{az}$ (-)	0.016 - 0.032 - 0.111 - 0.222
Les conductivités thermiques : $\lambda_f - \lambda_{air} - \lambda_c - \lambda_a$ ($W.m^{-1} . ^\circ C$)	0.13 - 0.025 - 250 - 45
Nombre de Peclet, Pe (-)	7.574
Nombre de dissipation, N_d (-)	0.0768

Afin de voir l'effet du coefficient de couple de contraintes, Les Figure 2 et 3 montrent la distribution de pression circonférentielle (dans la section médiane) et axiale pour différents cas. Ces dernières ont été réalisées pour différentes valeurs de paramètre de couple de contraintes ($l=0.0, 0.1$ et 0.2) et pour une excentricité relative $\varepsilon = 0.8$. On constate que la pression obtenue est affectée par la prise en compte des effets thermiques dans l'écoulement (Voir Fig. 2 cas isotherme vs. cas THD pour $l=0.0$). Cela est dû à la réduction de la viscosité en raison de l'augmentation de la température du film lubrifiant. Nous notons également que l'effet du fluide lubrifiant à couple de contraintes devient très important en augmentant le paramètre de couple de contraintes. La réduction de ce dernier paramètre conduit à la diminution de la pression développée qui tendra vers le cas d'un fluide newtonien pour les faibles valeurs de l . On peut conclure que l'effet de couple de contraintes est perceptible quand la taille des particules des additifs est grande par rapport a celle du fluide de base.

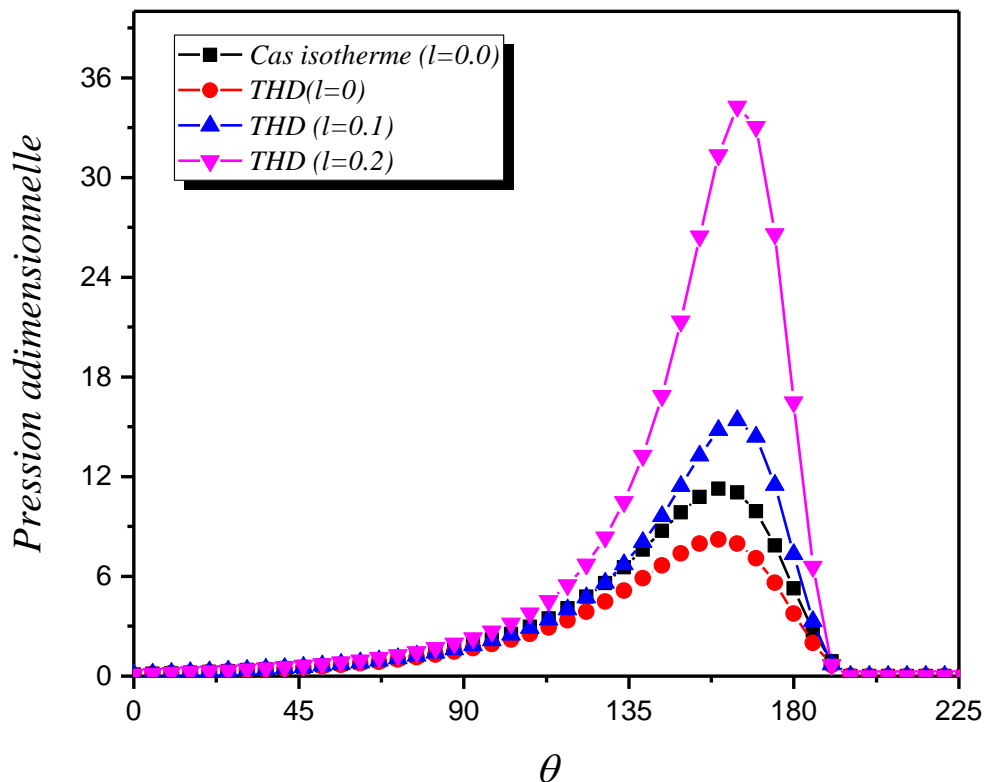


Figure 2 : Evolution de la pression circonférentielle dans la section médiane

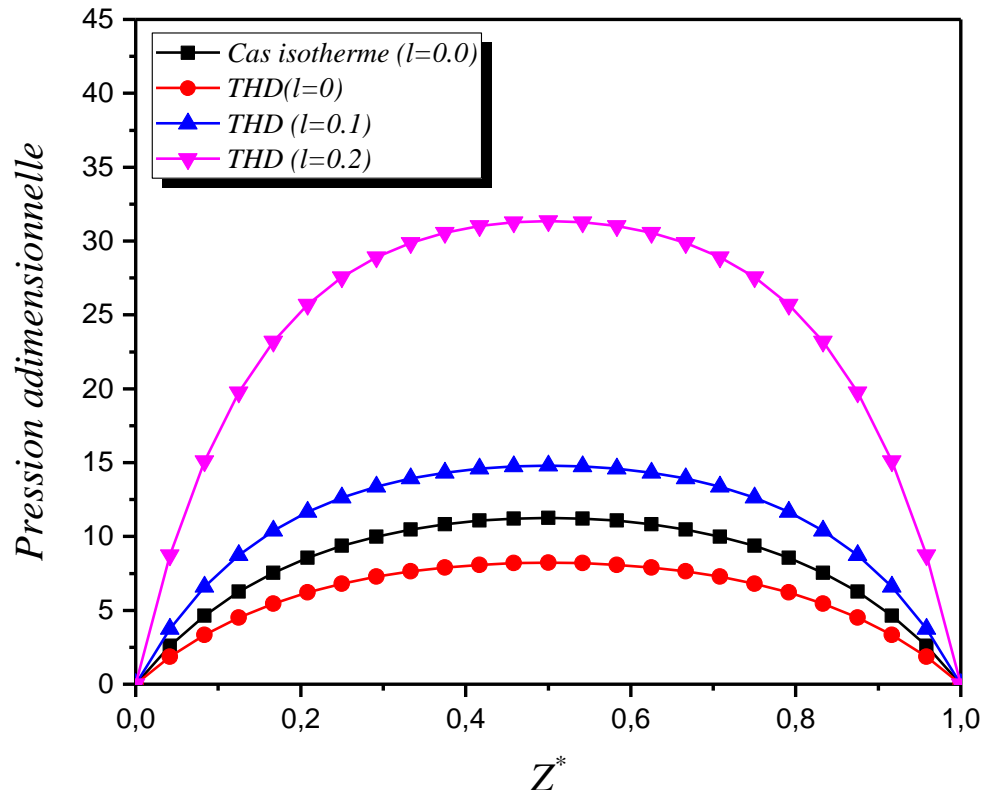


Figure 3 : Evolution de la pression axiale

La variation de la charge portante adimensionnelle en fonction de l'excentricité relative est illustrée dans la Figure 4 pour différentes valeurs de paramètre de couple de contraintes. Il est à noter que la capacité de charge est améliorée en tenant compte du couple de contraintes. On observe que la charge est significativement affectée par le paramètre de couple de contraintes pour les hautes excentricités, tandis qu'elle est légèrement affectée pour les faibles excentricités (Voir Fig. 4). On peut conclure que l'augmentation du paramètre de couple de contraintes conduit à une amélioration significative de la capacité de charge pour le cas des paliers fortement chargés. Figure 5 montre l'évolution du coefficient de frottement en fonction d'excentricité relative. On remarque que le coefficient de frottement diminue en augmentant l'excentricité. Cependant, malgré la tendance croissante de la force de frottement avec l'augmentation de l'excentricité relative (Frene [9]), le coefficient de frottement présente une tendance décroissante avec l'augmentation de l'excentricité relative. En outre, il est à noter que l'augmentation du paramètre de couple de contraintes entraîne la réduction du coefficient de frottement, qui est due à l'amélioration de la charge portante (Voir Fig. 4 & 5). Ces résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux de Oliver [10].

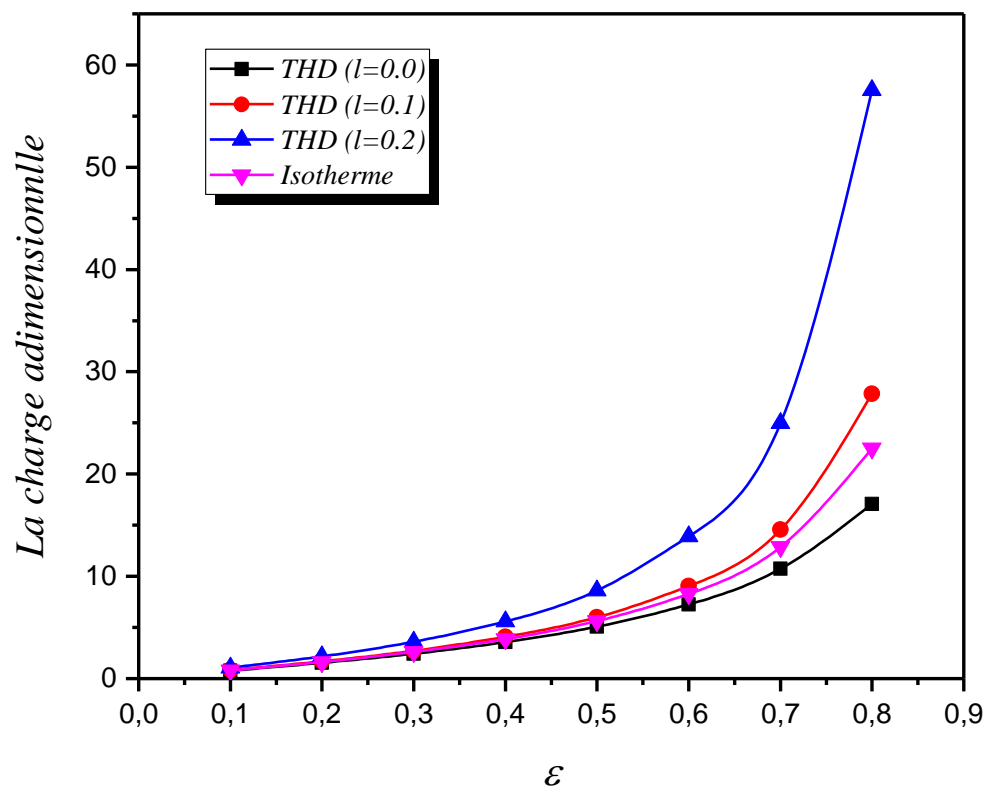


Figure 4 : La variation de la charge en fonction de l'excentricité relative

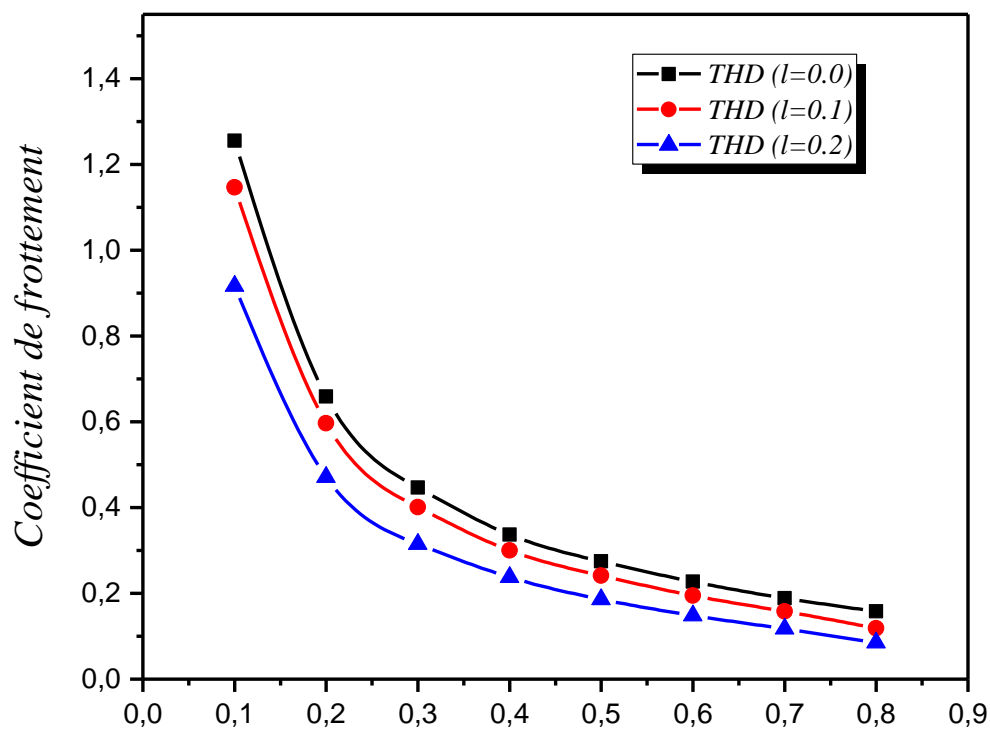


Figure 5 : La variation du coefficient de frottement en fonction de l'excentricité relative

8 Conclusion

Les performances des paliers hydrodynamiques finis lubrifiés avec fluide à couple de contraintes ont été étudiées en tenant compte des effets thermiques. Les conclusions tirées de cette étude sont présentées ci-après :

- La pression obtenue est affectée par la prise en compte des effets thermiques.
- L'effet du fluide lubrifiant à couple de contraintes devient très important en augmentant le paramètre de couple de contraintes.
- L'effet de couple de contraintes est perceptible quand la taille des particules des additifs est grande par rapport à celle du fluide de base.
- La capacité de charge est améliorée en tenant compte du couple de contraintes.
- L'augmentation du paramètre de couple de contraintes conduit à une amélioration significative de la capacité de charge pour le cas des paliers fortement chargés.
- Le coefficient de frottement présente une tendance décroissante avec l'augmentation de l'excentricité relative.
- L'augmentation du paramètre de couple de contraintes entraîne la réduction du coefficient de frottement.

Références

- [1] V.K. Stokes, Couples stress in fluids, *Phys. Fluids*, vol. 9, pp. 1709-1715, 1966
- [2] Lin J, Squeeze film characteristics of finite journal bearings: couple stress fluid model. *Trib. Int.* 31:201–207
- [3] Das NC. A study of optimum load-bearing capacity for slider bearings lubricated with couple stress fluids in magnetic field. *Trib. Int.* 31:393–400, 1998
- [4] X. L. Wang, K. Q. Zhu, S. Z. Wen, Thermohydrodynamic analysis of journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Tribology International*, vol. 34, issue 5, pp. 335-343, 2001
- [5] S. Boubendir, K. Bourdache, R. Bennacer, Effets des Additifs sur le Comportement hydrodynamique des Paliers Fluides Poreux, 11^{èmes} Journées de Mécanique EMP, Bordj El-Bahri, 10 et 11 Avril 2018.
- [6] D. Dawson, J. D. Hudson, Thermo-hydrodynamic analysis of the infinite slider bearing. Part I: The plane inclined slider bearing. *Proc. I.M.E. Lubrication and Wear convection* 1963. pp. 34-44
- [7] J. Ferron, J. Frene, R. Boncompain, A Study of the Thermohydrodynamic Performance of a Plain Journal Bearing Comparison Between Theory and Experiments, *J. of Lubrication Tech* 105(3), 422-428, 1983
- [8] D. G. Christopherson, A new mathematical method for the solution of film lubrication problems. *Proc. I.M.E.* 1941. Vol. 146, pp. 126–194
- [9] J. Frene, D. Nicolas, B Degueurce, D. Berthe, M Godet, G. Riollet, *Lubrification hydrodynamique : Paliers et butées*, Collection de la direction des études et recherches d'électricité de France, Eyrolles 1990
- [10] Oliver DR, Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearing, *J Non-Newtonian Fluid Mech* 1988;30:185–96