

# Méthode d'optimisation géométrique renvoyant le point de conception afin d'évaluer la défaillance d'un système en parallèle.

M.GILLE<sup>a,b</sup>, A.DUMAS<sup>a</sup>, P.BEAUREPAIRE<sup>b</sup>,  
N.GAYTON<sup>b</sup>, T.YALAMAS<sup>a</sup>

a. Phimeca Engineering ; {gille, dumas, yalamas}@phimeca.com

b. Université Clermont Auvergne, CNRS, SIGMA Clermont, Institut Pascal, F-63000  
Clermont-Ferrand, France ; {nicolas.gayton, pierre.beaurepaire}@sigma-clermont.fr

**Mots clefs :**            **Optimisation ; Système parallèle ; Point de conception ;  
Espace vectoriels ; Linéarité**

## Résumé :

*Le vieillissement des conduites forcées d'amenée d'eau aux centrales hydroélectrique entraîne une diminution de l'épaisseur de celles-ci par corrosion. Le scénario redouté correspond à la rupture entre deux années successives d'une conduite sachant que l'épreuve hydraulique lors de sa mise en service était réussie. Pour calculer cette probabilité annuelle conditionnelle en utilisant la formule de Bayes, il est nécessaire d'évaluer une probabilité système de type parallèle. Les méthodes FORM (First Order Reliability Method) et du tirage d'importance ont été privilégiées. Ces méthodes nécessitent de déterminer un point de conception et cet article propose une approche géométrique fondée sur l'hypothèse de la linéarité des états-limites pour le désigner. Cette méthode géométrique ayant un coût négligeable, implique seulement la résolution de systèmes linéaires, et est valable quelles que soient les dimensions du problème. Des applications académiques et industrielles permettent finalement de valider le faible coût de l'optimisation, sa validité en grande dimensions, et d'observer la sensibilité des performances par rapport aux hypothèses d'utilisation.*

## Abstract :

*The ageing of hydroelectric plant penstocks involves a slimming of their thickness by a corrosion phenomenon. The feared scenario corresponds to the rupture between two successive years knowing that the hydraulic test was successful when it was brought into operation. To calculate this conditional probability using Bayes' formula, it's necessary to evaluate a parallel system type probability. The First Order Reliability Method (FORM) and importance sampling method were privileged. These methods are applied at the design point, and this article proposes a geometrical approach, based on the linearity of the limit-state hypothesis to find it out. This geometrical method implies almost no calls to performance functions, needs the solving of a linear system only, and is usable whatever the dimension of the study and whatever the number of performance function. Academic and industrial tests enable us to confirm the low cost of this solution, its validity in high dimension and allow us to observe the performance sensibility with respect to the usage hypothesis.*

# 1 Introduction

La prédiction de la durée de vie de structures vieillissantes est un problème contemporain majeur. Le couplage de la fatigue et de la mécanique de la rupture avec les outils actuels de fiabilité et de simulation permet aujourd'hui d'étudier l'intégrité de ces structures. Il s'agit de garantir annuellement l'intégrité de conduites forcées d'amenée d'eau aux centrales hydroélectriques à partir d'un diagnostic mécanique. Le modèle mécanique associé traite essentiellement de la rupture par instabilité plastique et est soumis à la notion d'incertitude qui est introduite par la modélisation de certaines données comme variables aléatoires.

Le scénario redouté correspond à celui d'une conduite qui serait devenue défaillante entre deux années successives. Par ailleurs une épreuve hydraulique est réalisée lors de sa mise en service. Cette épreuve est prise en compte pour l'évaluation de la défaillance. L'événement de défaillance est alors la probabilité de défaillance annuelle sachant la réussite de l'épreuve hydraulique :

$$P(G_N > 0 \cap G_{N+1} < 0 \mid G_{Ep} > 0)$$

Avec  $G_N$  et  $G_{N+1}$  les fonctions de performances aux années  $N$  et  $N + 1$  et  $G_{Ep}$  la fonction de performance de l'épreuve. En utilisant la formule de Bayes cette probabilité conditionnelle est calculable par l'évaluation d'une probabilité système de type parallèle au numérateur suivant la formule :

$$\frac{P(G_N > 0 \cap G_{N+1} < 0 \cap G_{Ep} > 0)}{P(G_{Ep} > 0)}$$

Les méthodes FORM (First Order Reliability Method) et du tirage d'importance ont été privilégiées car elles sont efficaces et qu'il est nécessaire d'évaluer un très grand nombre de probabilités conditionnelles, chacune correspondant à un type spécifique de conduite.

Or ces deux méthodes sont appliquées au point de conception, et la recherche de ce point pose problème lorsque la défaillance d'un système est définie en parallèle. En effet, le problème d'optimisation est d'autant plus difficile à résoudre que l'état limite est une composition des états-limites de chaque fonction de performance en jeu : il n'est donc pas surprenant que l'optimisation aboutisse parfois loin du point de conception.

Les divergences pourront certes être ciblées et contournées au cas par cas avec le panel d'algorithmique existant, mais ce risque d'échec empêche de systématiser l'évaluation de la défaillance d'un modèle dont le paramétrage implique un nombre très élevé de combinaisons.

Cet article propose une solution qui contourne le problème en linéarisant toutes les contraintes. Il existe un nombre fini mais potentiellement élevé de candidats pour le point de conception et une approche aux fondements géométriques permettant efficacement d'identifier ce dernier est proposée ici. Elle n'implique que la résolution de systèmes linéaires, quelle que soit la dimension et quel que soit le nombre de fonctions de performances en jeu -là où les travaux de Genz génèrent un surcoût.

L'application finale du tirage d'importance est centrée sur le point de conception et appelle directement la fonction de performance pour corriger l'hypothèse de non-linéarité, ce qui donne la propriété de toujours converger, à l'avantage des travaux de Genz [1] ou de Patelli et al. [2].

La méthode géométrique sera développée puis des applications académiques et industrielles permettront finalement de valider le faible coût de l'optimisation, sa validité en grande dimension, et d'observer la sensibilité des performances par rapport aux hypothèses d'utilisation.

## 2 Méthodologie de l'optimisation géométrique

### 2.1 Vue globale de l'approche

La méthode géométrique renvoie le point de conception lorsque les contraintes sont linéarisées. Ce point est choisi dans une liste candidats constituées des points de conceptions propre à chaque fonction de performance et les points intersections qui feront l'objet d'une analyse détaillée. Cette analyse propose ainsi :

- une première étape d'optimisation qui renvoie les points de conceptions
- la construction des états-limites linéarisés en ces points
- la définition géométrique de toutes les intersections des états-limites deux à deux
- la recherche des points dans les intersections qui minimise la distance à l'origine
- l'évaluation du caractère défaillant ou non des points de la liste
- la sélection du point le plus proche de l'origine parmi ceux étant défaillants

### 2.2 Les points de conception de chaque fonction de performance

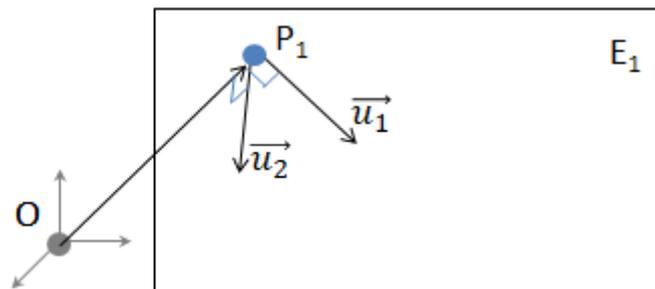
Pour chaque fonction de performance  $g$ , une optimisation est réalisée pour renvoyer le point de défaillance le plus probable  $P^*$  (aussi appelé point de conception). Cette étape constitue le principal coût de l'optimisation géométrique.

### 2.3 L'espace vectoriel décrivant l'état-limite linéarisé

A chaque fonction de performance est associé un domaine de défaillance. L'état limite de ce domaine devient un hyperplan en formulant l'hypothèse de sa linéarité. L'hyperplan relatif à une fonction de performance contient son point de conception et est par définition orthogonal au vecteur bipoint défini par l'origine et le point de conception. L'hyperplan est de dimension  $n - 1$  aussi en dimension 3 il peut se décrire vectoriellement par un point et deux vecteurs. Pour  $P_1$  le point de conception et  $\vec{u}_1$  les vecteurs de la base on a :

$$E_1 = \{P_1 + \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\} \quad (1)$$

Figure 1: Construction de la base vectorielle décrivant un hyperplan



Si deux points de conception devaient être alignés dans l'espace avec l'origine alors une infime altération serait appliquée à la coordonnée d'un des points par l'ajout d'un résidu ; cette altération serait appliquée en sa coordonnée maximale pour en minimiser l'impact. Par ailleurs, si un point de conception devait être parfaitement superposé à l'origine alors pour définir le vecteur bipoint il faudrait se référer au gradient obtenu à la première étape de l'optimisation.

L'étape de génération des vecteurs  $\vec{u}$  a été développée spécialement pour remplir deux objectifs : d'une part garantir à une fonction de performance donnée qu'ils formeront bien une base de son état-limite hyperplan, et d'autre part pour garantir qu'il n'en existe pas deux dans toute l'étude qui soient colinéaires. La génération est fondée sur l'observation du produit scalaire :

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \left( \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1}, \frac{x_1 x_2 x_3}{x_2}, -2 \frac{x_1 x_2 x_3}{x_3} \right) = 0 \quad (2)$$

Pour  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}$ . Les deux vecteurs retenus ici seraient :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \left( \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1}, \frac{x_1 x_2 x_3}{x_2}, -2 \frac{x_1 x_2 x_3}{x_3} \right) \\ \vec{u}_2 &= \left( \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1}, -2 \frac{x_1 x_2 x_3}{x_2}, \frac{x_1 x_2 x_3}{x_3} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

En dimension  $n$  on génère les  $n - 1$  vecteurs  $\vec{u}_i$  aux coordonnées  $u_{i,j}$  telles que :

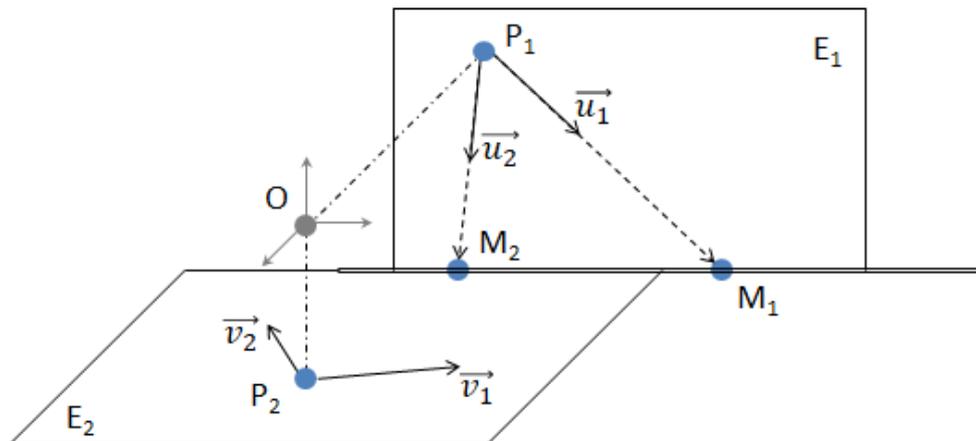
$$u_{i,j} = \begin{cases} -(n-1) (\prod_{k=1}^n x_k) / x_j & \text{si } j = n + 1 - i \\ (\prod_{k=1}^n x_k) / x_j & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

Ce processus est appliqué aux coordonnées non nulles, les autres seront remplacées par un entier lambda spécifique à chaque vecteur selon une application bijective.

## 2.4 L'espace vectoriel décrivant l'intersection

Dans le cas d'une étude en dimension 3 les états limites linéarisés sont des plans et l'intersection de ces derniers est une droite – si elle existe et si les points de conception ne sont pas alignés avec l'origine dans l'espace. Deux points distincts suffiront alors à décrire géométriquement cette droite. Pour les définir, les vecteurs qui constituent la base d'un plan sont sélectionnés successivement pour définir l'intersection entre la droite qu'il dirige et l'autre plan :

Figure 2: Obtention des points qui définissent l'intersection



Le concept est généralisable : en dimension  $n$  il faut  $n - 1$  points pour décrire l'intersection de dimension  $n - 2$ . En nommant  $F$  l'espace intersection et  $M_i$  les points obtenus on a :

$$F = \left\{ M_0 + \text{Vect} \{ \overrightarrow{M_1 M_2}, \dots, \overrightarrow{M_0 M_{n-1}} \} \right\} \quad (5)$$

La méthode s'expose ici à une propagation géométrique de l'erreur générée par l'hypothèse de linéarité. En effet, pour une même erreur relevée par rapport à la courbure de l'état-limite en deux points de conception, l'impact différera selon la position des points dans l'espace standard puisque c'est l'intersection des hyperplans définis en ces points et de normal le vecteur bipoint entre l'origine et le point de conception défini qui est utilisée en support d'analyse.

## 2.5 Les points intersections

L'espace intersection ayant été définie vectoriellement à l'étape précédente, il est possible de trouver un jeu de coefficient qui décrit la position du point intersection. En nommant  $I$  ce point et  $(k_1, \dots, k_{n-2})$  les coefficients on a :

$$I = M_1 + k_1 \overrightarrow{M_1 M_2}, \dots, k_{n-2} \overrightarrow{M_0 M_{n-1}} \quad (6)$$

En sachant que le point intersection minimise la distance à l'origine, l'obtention de ces coefficients est réalisée suivant la démarche suivante ; en dimension  $n$  :

- Sélection d'un point quelconque dans l'espace intersection caractérisé par un jeu de  $n - 3$  coefficients.
- Ecriture des  $n$  coordonnées de ce point.
- Ecriture de la somme de ses  $n$  coordonnées mises au carrée (carré de la distance).
- Expression de la dérivée par le jeu de coefficients de cette somme quadratique.
- Recherche de l'unique solution qui annule cette expression d'ordre 1 ; elle correspond au jeu de coefficients qui définit l'unique point intersection.

La démarche est proposée sous forme exhaustive et en dimension quelconque en annexe [A.2].

## 2.6 Sélection du point optimal

Il y a désormais une liste composée des points de conception de chaque fonction de performance et des points intersections. Sous hypothèse de linéarité des états-limites, l'unique point de conception appartient à cette liste. Les propriétés qui le distinguent sont qu'il appartient au domaine de défaillance et qu'il est le plus proche de l'origine. Si la seconde s'étudie trivialement, la première est détaillée ci-dessous.

La défaillance d'un point est définie par rapport aux contraintes linéarisées. Pour cela, en connaissant le caractère défaillant ou non de l'origine par rapport à un domaine de défaillance, on cherche alors à savoir si ce point est « du même côté » que l'origine, c'est-à-dire dans le même demi-espace délimité par l'hyperplan. En notant  $M$  le point,  $O$  l'origine et  $D_f$  le domaine de défaillance, cette information peut être obtenue avec l'étude du signe du produit scalaire :

$$\begin{cases} (O \in D_f) \ \& \ (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} < 0) \Rightarrow M \in D_f \\ (O \notin D_f) \ \& \ (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} > 0) \Rightarrow M \in D_f \\ (O \in D_f) \ \& \ (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} > 0) \Rightarrow M \notin D_f \\ (O \notin D_f) \ \& \ (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} < 0) \Rightarrow M \notin D_f \end{cases} \quad (7)$$

## 3 Application de la méthode

### 3.1 Introduction

L'optimisation géométrique est testée dans un premier temps avec des modèles faisant appels à des fonctions de performances définies linéairement [A.3], puis avec d'autres définies non-linéairement et enfin sur le modèle complexe d'une étude réelle pour laquelle la linéarité est supposée. Les descriptions ci-dessous détaillent la tendance globale observée sur un total de 12 cas établis en dimension 2, 3, et 5 pour les deux premières approches simulées et de 18 cas pour l'étude industrielle.

Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec la méthode composite (décrite dans le paragraphe ci-dessous) et, pour les modèles académiques, en ayant pour référence ceux donnés par simulation de Monte-Carlo. Les critères d'arrêts des tirages sont d'une part le nombre maximal d'appels fixé à  $10^5$  et à  $10^6$  pour le cas réel, et d'autre part la convergence du coefficient de variation à une valeur de 0,05.

Dans le cadre d'un problème de fiabilité système en parallèle, la méthode composite est une approche répandue qui consiste à construire une unique fonction contrainte. Elle se retrouve à la base de multiples travaux [3] dont ceux autour de la méthode AK-System [4]. En effet, pour un problème avec une seule fonction de performance, une réalisation est défaillante si son image par cette fonction est négative. Pour un problème de fiabilité système en parallèle, il suffit d'observer si la valeur maximale renvoyée par les fonctions de performance est négative : si c'est le cas, alors toutes les autres le sont et il y a défaillance. Pour  $x$  une réalisation,  $g_{\alpha \in \llbracket 0, \Omega - 1 \rrbracket}$  les fonctions de performances et  $D_f$  le domaine de défaillance on a :

$$\max_{\alpha \in \llbracket 0, \Omega - 1 \rrbracket} (g_{\alpha}(x)) \leq 0 \Leftrightarrow x \in D_f \quad (8)$$

On définit ainsi la fonction composite :

$$g_{\text{composite}}(x) = \{x \rightarrow g_{\theta}(x), \forall (\alpha, \theta) \in \llbracket 0, \Omega - 1 \rrbracket^2 \ g_{\theta}(x) \geq g_{\alpha}(x)\}. \quad (9)$$

### 3.2 Comportement pour des cas linéaires

Les résultats sont fournis dans le Tableau 1.

#### Remarques pour les résultats avec la méthode des tirages d'importance (IS)

En comparaison, la méthode géométrique est logiquement plus robuste que la méthode composite. Les deux méthodes convergent efficacement au point de conception. Le coût calcul moyen varie beaucoup malgré des convergences exactes (Cas 2 et 3). Le coût de la simulation par tirage d'importance est en effet impacté par la géométrie du domaine de défaillance et par la distance du point de conception à l'origine.

Le cas 6 montre qu'il existe des situations où la méthode composite donne une mauvaise approximation du point de conception. Remarque expérimentale : les cas présentant une mauvaise convergence de la méthode composite implique qu'au moins une des fonctions contraintes n'est pas définis par toutes les variables (type «  $f(a,b,c) = a + c$  »), ce qui pourrait bien être un facteur de perturbation de l'optimisation.

Tableau 1: Résultats des tests linéaires

Evaluation	Cas	Méthode	PF	C.Variation	Nb. d'appels
IS	5	Monte-Carlo	2.55E-05	0.063	10000000
		Méthode géométrique	<b>2.58E-05</b>	<b>0.050</b>	<b>1813</b>
		Méthode composite	2.21E-05	0.050	2126
	6	Monte-Carlo	x	x	10000000
		Méthode géométrique	<b>7.71E-16</b>	<b>0.050</b>	<b>58044</b>
		Méthode composite	9.42E-16	0.113	100000
	7	Monte-Carlo	5.27E-05	0.050	7669000
		Méthode géométrique	<b>5.84E-05</b>	<b>0.050</b>	<b>3115</b>
		Méthode composite	5.39E-05	0.050	3200
	8	Monte-Carlo	2.08E-03	0.050	194300
		Méthode géométrique	<b>2.23E-03</b>	<b>0.050</b>	<b>39212</b>
		Méthode composite	2.23E-03	0.050	37600
FORM	5	Monte-Carlo	2.55E-05	0.063	10000000
		Méthode géométrique	<b>2.50E-05</b>		<b>13</b>
		Méthode composite	2.50E-05		26
	6	Monte-Carlo	x	x	10000000
		Méthode géométrique	<b>2.24E-14</b>		<b>44</b>
		Méthode composite	5.15E-07		2037
	7	Monte-Carlo	5.27E-05	0.050	7669000
		Méthode géométrique	<b>1.43E-04</b>		<b>15</b>
		Méthode composite	1.48E-04		2029
	8	Monte-Carlo	2.08E-03	0.050	194300
		Méthode géométrique	<b>7.12E-02</b>		<b>12</b>
		Méthode composite	7.15E-02		2376

#### Remarques pour les résultats avec la méthode FORM

Les résultats des méthodes géométrique sont très intéressants pour avoir un ordre de grandeur de la  $P_f$  par rapport au coût très faible qu'elle suscite.

Avec des fonctions contraintes linéaires et pour FORM, la qualité de l'approximation ne dépend quasiment que de la géométrie du domaine de défaillance.

### 3.3 Comportement pour des cas non-linéaires

Les résultats sont fournis dans le Tableau 1Tableau 2.

#### Remarques pour les résultats avec la méthode des tirages d'importance (IS)

La méthode géométrique ne se distingue pas de celle composite : toutes les deux ne sont pas robustes et ne convergent pas efficacement au point de conception.

Le cas 6 présente une situation où le domaine de défaillance n'existe pas à cause de l'hypothèse de linéarité des états-limites alors qu'il existe réellement.

#### Remarques pour les résultats avec la méthode FORM

La méthode géométrique ne se distingue pas de celle composite : toutes les deux sont trop instables pour pouvoir conclure et s'y référer dans le but d'avoir un ordre de grandeur fiable de la  $P_f$ .

Tableau 2: Résultats des tests non-linéaires

Evaluation	Cas	Méthode	PF	C.Variation	Nb. d'appels
IS	5	Monte-Carlo	1.00E-07	1.005	10000000
		Méthode géométrique	<b>x</b>	<b>-1</b>	<b>100022</b>
		Méthode composite	1.41E-08	0.050	4300
	6	Monte-Carlo	1.77E-01	0.050	1900
		Méthode géométrique	<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>
		Méthode composite	1.69E-01	0.048	1600
	7	Monte-Carlo	1.44E-01	0.049	2500
		Méthode géométrique	1.52E-01	0.048	1243
		Méthode composite	1.32E-01	0.048	1400
	8	Monte-Carlo			
		Méthode géométrique			
		Méthode composite			
FORM	5	Monte-Carlo	1.37E-08	0.050	4300
		Méthode géométrique	<b>x</b>		<b>22</b>
		Méthode composite	2.35E-08		9
	6	Monte-Carlo	1.77E-01	0.050	1900
		Méthode géométrique	<b>x</b>		
		Méthode composite	2.11E-01		320
	7	Monte-Carlo	1.44E-01	0.049	2500
		Méthode géométrique	<b>1.95E-01</b>		<b>43</b>
		Méthode composite	1.95E-01		23
	8	Monte-Carlo	2.05E-02	0.050	19300
		Méthode géométrique	<b>9.85E-02</b>		<b>31</b>
		Méthode composite	9.42E-02		2465

## 4 Cas industriel

### 4.1 Contexte

Il s'agit d'évaluer des probabilités de défaillance annuelles des conduites et des probabilités conditionnelles sachant la réussite d'une épreuve hydraulique. La reformulation probabiliste de l'événement conditionnel comme présentée en introduction mène à une étude d'événement en parallèle.

L'étude est faite en dimension 4 et présente 3 fonctions de performances. Le modèle étudié est paramétré et nous amène finalement à étudier une sélection de 18 cas dans un objectif proche de formuler un abaque pour dresser un ensemble de résultats de références. L'ordre de grandeur de la probabilité de défaillance varie énormément entre chaque cas. Cette étude permet ainsi de confronter la méthode géométrique et la méthode composite à un modèle à la complexité variable, ce qui est idéale pour tester les limites des deux méthodes.

A chaque configuration, la défaillance est estimée par application du tirage d'importance et FORM. Les conditions du tirage d'importance sont conservées, avec une exigence du coefficient de variation fixée à 0,05 et un maximum d'appels fixé à  $10^6$ . Les résultats FORM sont jugés par leur

ordre de grandeur (suite aux observations des cas tests) et sont comparés aux meilleurs résultats issus du tirage d'importance.

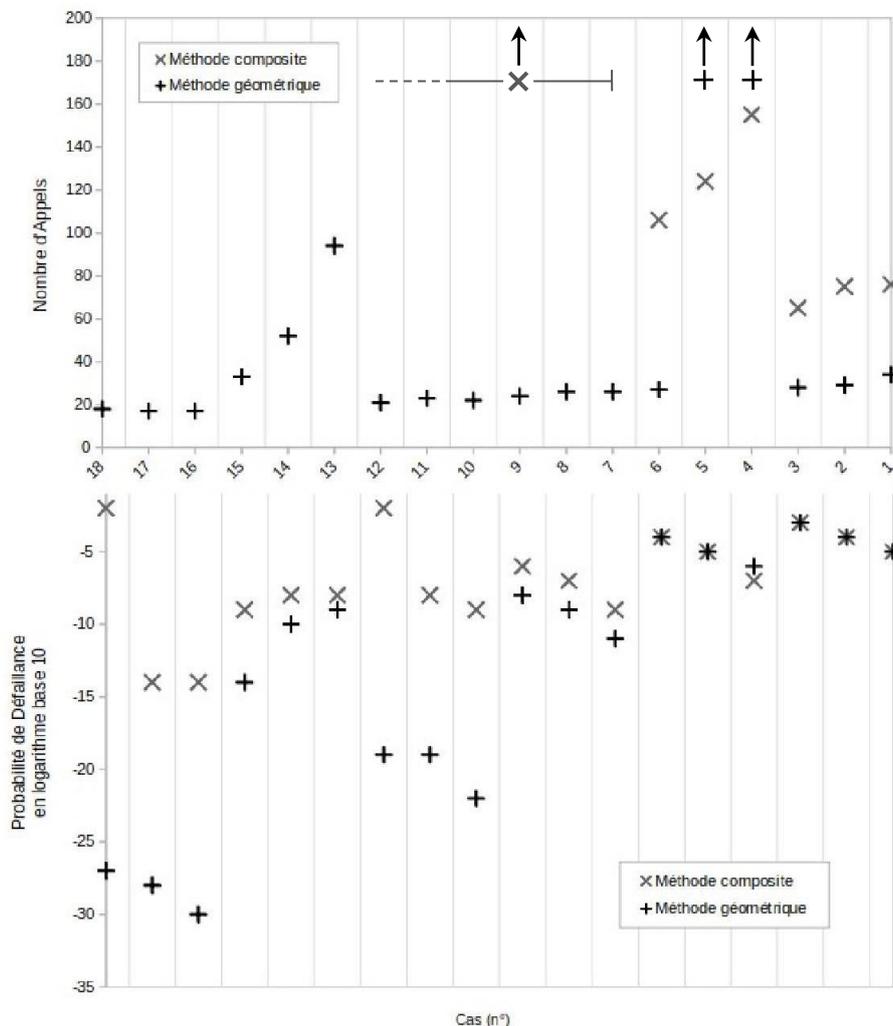
## 4.2 Approximations FORM

Les résultats sont fournis dans la Tableau 1 Figure 3.

Le coût de la méthode composite culmine avec régularité à plus de 2 000 appels pour tous les cas de 7 à 18, ce qui force à conclure sur la mauvaise qualité de l'étape d'optimisation. Il n'y a cependant pas de lien apparent entre le nombre d'appels et la qualité de la prédiction pour les résultats de la méthode composite. La probabilité de défaillance a tendance à être surestimée ; ce résultat pourrait être intéressant dans une approche sécuritaire.

La méthode géométrique montre un pic de coût (hors graphique) pour les cas (4, 5) avec les valeurs (1900, 300) et un autre pour les cas (13,14) avec les valeurs (90, 50) : ce surcoût est dû à l'étape d'optimisation de chaque fonction. Ces coûts anormalement élevés impliquent néanmoins une bonne qualité de l'estimation de la défaillance par FORM (l'implication inverse n'est pas vérifiée). Ces surcoûts particuliers mis à part, la méthode propose un coût légèrement inférieur à celui de la méthode de référence. La probabilité de défaillance calculée à globalement tendance à être sous-estimée. Ce sont d'ailleurs les valeurs les plus faibles des estimations de la probabilité de défaillance qui sont le plus soumises à l'erreur : en effet il est d'autant plus probable que l'erreur générée par l'hypothèse de linéarité des états-limite est grande en soit la cause que le point final retenu à l'étape de sélection est éloigné de l'origine. La valeur de  $10^{-15}$  est un seuil au-dessus duquel les approximations de la probabilité de défaillance par FORM avec l'analyse géométrique peuvent être raisonnablement retenues.

Figure 3: Résultats de l'application FORM au cas industriel



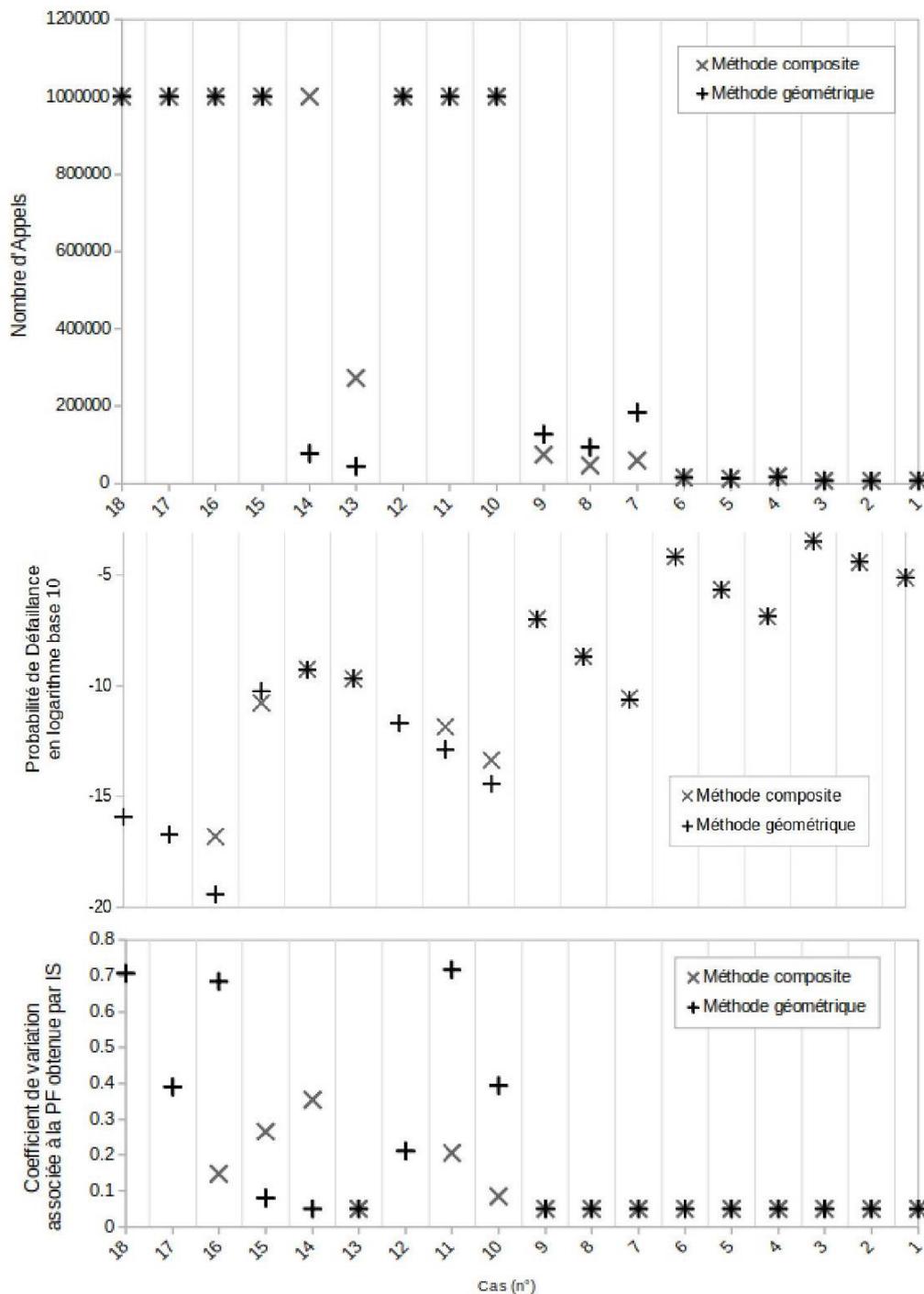
### 4.3 Estimations par IS

Les résultats sont fournis dans la Tableau 1 Figure 4.

Pour les cas les plus complexes, la méthode composite n'est pas robuste : le coefficient de variation des tirages ne converge jamais à la valeur de 0,05 et par 3 fois ne converge pas du tout - aucun résultat obtenu pour les cas 12, 17 et 18.

La méthode géométrique est plus intéressante pour les cas les plus complexes : bien que le coefficient de variation ne converge pas exactement à la valeur 0,05, les résultats sont proches et existent toujours. Si une approximation FORM (très peu couteuse) renvoyée s'éloigne de plus de cinq décades d'un ordre de grandeur connu de la probabilité de défaillance alors l'application des tirages d'importance engendrera un coût important (au moins  $10^6$ ).

Figure 4: Résultats de l'application IS au cas industriel



## 5 Conclusion

Pour évaluer la défaillance d'évènements en parallèle avec les méthodes FORM et du tirage d'importance (IS), il faut trouver le point de conception. La recherche de ce point est fréquemment amenée à diverger de par l'état-limite qui a une forme complexe en raison des non-linéarités et du nombre élevé de fonctions de performance dans ce genre de problème. Ce papier propose une solution qui se fonde sur l'optimisation –plus simple– des fonctions de performances une à une, renvoyant pour chacune le point de conception  $P_\alpha^*$  et sur l'hypothèse de la linéarité des états-limites. Elle est utilisable pour une étude de fiabilité en dimension quelconque et impliquant un nombre de fonctions de performance quelconque, sans générer de surcoût.

Elle consiste en une analyse géométrique dans l'espace standard qui premièrement, renvoie tous les points intersections les plus proches de l'origine relatifs à tous les espaces intersections de deux états-limites considérés deux à deux, puis en la sélection du point le plus pertinent dans la liste composée de ces derniers et des points de conceptions (les points intersections et de conception). Cette analyse ne requiert que la résolution d'un système linéaire et ne fait aucun appel à la fonction de performance.

Une première étude de modèles définis linéairement confirme la validité de cette méthode quelle que soit la dimension du problème et quel que soit le nombre de fonctions de performance, et son très faible coût pour FORM. Les cas non-linéaires ont permis d'explicitier la sensibilité de la méthode à la non-linéarité avec notamment la possibilité que l'existence de la solution ne soit pas reconnue linéairement. Enfin une application à un modèle réel qui ne vérifiait pas la linéarité supposée des états-limites a, d'une part mis en exergue les limites relatives à l'IS car le coût de son application dépend de la géométrie du domaine de défaillance et de la distance à l'origine du point d'application, et a d'autre part appuyé la difficulté à conclure sur l'efficacité réelle de la méthode dans le cadre d'une étude hors hypothèse.

## Remerciements

Les auteurs voudraient remercier le soutien du FEDER et la Région Auvergne qui ont permis la recherche et la présentation de ce travail.

## A Annexe

### A.1 Notations

$n$	La dimension de l'étude définie par le nombre de variable aléatoire en jeu.
$R^n$	L'espace réel de travail de dimension $n$ .
$O$	L'origine de l'espace standard.
$g_\alpha$	Une fonction parmi les $\Omega$ fonctions de performances.
$\alpha$	Un indice défini sur l'intervalle $[[0, \Omega - 1]]$ .
$\beta$	Un indice défini sur l'intervalle $[[0, \Omega - 1]]$ et différent de $\alpha$ .
$D_{f_\alpha}$	Le domaine de défaillance associé à une fonction $g_\alpha$ .
$P_\alpha^*$	Le point dans l'espace standard qui appartient à $D_{f_\alpha}$ et qui minimise la distance à l'origine.
$\vec{n}_\alpha$	Le vecteur bipoint $(O, P_\alpha^*)$ dans l'espace standard.

- $E_\alpha$  L'état-limite dans l'espace standard linéairement approximé du domaine de défaillance  $D_{f_\alpha}$ .  
 $E_{\alpha\beta}$  L'intersection géométrique des espaces  $E_\alpha$  et  $E_\beta$ .  
 $M_{\alpha\beta,i}$  Points utilisés pour décrire l'espace  $E_{\alpha\beta}$ .  
 $I_{\alpha\beta}$  Un point de l'espace  $E_{\alpha\beta}$ .  
 $I_{\alpha\beta}^*$  Le point de l'espace  $E_{\alpha\beta}$  qui minimise la distance à l'origine.

## A.2 Obtention du système linéaire pour les points intersections

Soit  $I_{\alpha\beta}$  un point de l'espace  $E_{\alpha\beta}$ , on a :

$$\exists (K_1, \dots, K_{n-2}) \in R^{n-2}, \quad I_{\alpha\beta} = M_1 + K_0 \overrightarrow{M_1 M_2}, \dots, K_{n-3} \overrightarrow{M_0 M_{n-1}}$$

On définit la notation des coordonnées :

$$\overrightarrow{M_{\alpha\beta,0} M_{\alpha\beta,k}} = (m_{k-1,0}, \dots, m_{k-1,n-1})_{k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket}$$

$$M_{\alpha\beta,0} = (M_0, \dots, M_{n-1})$$

On notera le décalage d'indice opéré sur  $k$  pour faciliter la généralisation et de fait, par exemple, le vecteur  $\overrightarrow{M_{\alpha\beta,0} M_{\alpha\beta,1}}$  a pour coordonnées  $(m_{0,0}, \dots, m_{0,n-1})$ . Le point  $I_{\alpha\beta}$  a alors pour coordonnées :

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} M_0 + K_0 m_{0,0}, \dots, K_{n-3} m_{n-3,0} \\ \dots \\ M_{n-1} + K_{n-1} m_{0,n-1}, \dots, K_{n-3} m_{n-3,n-1} \end{pmatrix}$$

Soit  $d$  la distance du  $I_{\alpha\beta}$  à l'origine. Pour  $i \in \llbracket 0, n-3 \rrbracket$  :

$$d^2 = \begin{pmatrix} (M_0 + \sum K_i m_{i,0})^2 \\ + \dots \\ (M_{n-1} + \sum K_i m_{i,n-1})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^2 + 2M_0 \sum K_i m_{i,0} + (\sum K_i m_{i,0})^2 \\ + \dots \\ M_{n-1}^2 + 2M_{n-1} \sum K_i m_{i,n-1} + (\sum K_i m_{i,n-1})^2 \end{pmatrix}$$

Le point  $I_{\alpha\beta}^*$  est alors défini par les coefficients  $(k_1, \dots, k_{n-2})$  qui annulent les dérivées partielles de  $d$  par les variables  $(K_1, \dots, K_{n-2})$ . On observe :

$$\frac{\partial}{\partial K_0} (M_0^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial K_0} (2M_0 \sum K_i m_{i,0}) = 2M_0 m_{0,0}, \quad \frac{\partial}{\partial K_0} ((\sum K_i m_{i,0})^2) = 2m_{0,0} \sum K_i m_{i,0}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial K_0} (d^2) = \sum M_i m_{i,0} \begin{matrix} + m_{0,0} \sum K_0 m_{1,0} & + \dots & + m_{0,0} \sum K_{n-3} m_{n-3,0} \\ + \dots & + \dots & + \dots \\ + m_{0,n-1} \sum K_0 m_{1,n-1} & + \dots & + m_{0,n-1} \sum K_{n-3} m_{n-3,n-1} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial K_0} (d^2) = \sum M_i m_{i,0} + K_0 \sum m_{0,i} m_{0,i} + \dots + K_{n-3} \sum m_{0,i} m_{n-3,i}$$

De la même façon, pour  $z \in \llbracket 0, n-3 \rrbracket$  :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial K_z} (d^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum M_i m_{i,0} + K_0 \sum m_{0,i} m_{0,i} + \dots + K_{n-3} \sum m_{0,i} m_{n-3,i} \\ \dots \\ \sum M_i m_{i,n-3} + K_0 \sum m_{n-3,i} m_{0,i} + \dots + K_{n-3} \sum m_{n-3,i} m_{n-3,i} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial K_z} (d^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sum m_{0,i} m_{0,i} & \dots & \sum m_{0,i} m_{n-3,i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum m_{n-3,i} m_{0,i} & \dots & \sum m_{n-3,i} m_{n-3,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 \\ \dots \\ K_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum M_i m_{i,0} \\ \dots \\ -\sum M_i m_{i,n-3} \end{bmatrix}$$

### A.3 Liste des fonctions utilisées

$$\text{Cas 1 : } \begin{cases} g_1(x, y) = -\frac{1}{4}x + y + 2 \\ g_2(x, y) = -\frac{1}{9}x + y + 2 \end{cases}$$

$$\text{Cas 5 : } \begin{cases} g_1(x, y, z) = \frac{x^3}{y} - z + 2 \\ g_2(x, y, z) = -xyz + 5 \\ g_3(x, y, z) = -\frac{3}{5}x - 4y - 3z + 20 \end{cases}$$

$$\text{Cas 2 : } \begin{cases} g_1(x, y) = -2x - y - 5 \\ g_2(x, y) = -\frac{1}{2}x + y + 2.5 \\ g_3(x, y) = -3x + y + 15 \\ g_4(x, y) = -\frac{1}{3}x + y + \frac{5}{3} \\ g_5(x, y) = -\frac{1}{3}x - y + \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{Cas 6 : } \begin{cases} g_1(x, y, z, t, u) = -x^2 - z + t^2 - 4u \\ g_2(x, y, z, t, u) = 2x - y - \frac{11}{10}z + t^3 + 2u \\ g_3(x, y, z, t, u) = -\frac{3}{5}x + y + z - t^4 + 3u \\ g_4(x, y, z, t, u) = y^3 + 10z - 10t \end{cases}$$

$$\text{Cas 3 : } \begin{cases} g_1(x, y, z) = -x - z + 2 \\ g_2(x, y, z) = -y - z + 2 \\ g_3(x, y, z) = -\frac{3}{5}x - z + 3 \\ g_4(x, y, z) = -x - y - z + 2 \\ g_5(x, y, z) = -\frac{1}{2}x + y - z - 4 \end{cases}$$

$$\text{Cas 7 : } \begin{cases} g_1(x, y, z) = -x^3 + y - z + 2 \\ g_2(x, y, z) = -x + y^3 + z + 5 \\ g_3(x, y, z) = -x^2 + y + 2z - 4 \end{cases}$$

$$\text{Cas 4 : } \begin{cases} g_1(x, y, z, t, u) = -x - z + 2t - 4u \\ g_2(x, y, z, t, u) = 2x - y - \frac{11}{10}z + t + 2u \\ g_3(x, y, z, t, u) = -\frac{3}{5}x + y + z - t + 3u \\ g_4(x, y, z, t, u) = 2x + 2y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$$\text{Cas 8 : } \begin{cases} g_1(x, y, z, t, u) = -x^5 - z + t^2 - 4u \\ g_2(x, y, z, t, u) = 2x - y^3 - \frac{11}{10}z + t^3 + 2u \\ g_3(x, y, z, t, u) = -\frac{3}{5}x + y + z - t^4 + 3u \end{cases}$$

### Références

- [1] Genz A, Numerical computation of multivariate normal probabilities, Journal of Computational and Graphical Statistics, 1(2) :141-149, 1992.
- [2] Patelli E. et al., On multinormal integrals by importance Sampling for parallel system reliability., Structural Safety 33, 1-7, 2011.
- [3] Lacaze S. et al, Brief Note : Probability of failure sensitivity with respect to decision variables, Struct Multidisc Optim (2015) 52 :375-381.
- [4] W.Fauriat et N.Gayton, AK-SYS : An adaptation of the AK-MCS method for system reliability, Reliability Engineering and System Safety 123 (2014) 137-144.