

# Influence d'un obstacle cylindrique sur le transfert de chaleur dans une cavité différentiellement chauffée

J.P. ROBINSON<sup>a</sup>, R. GERS<sup>a</sup>, P. CHORIN<sup>b</sup>, F. MOREAU<sup>b</sup>, O.  
SKURTYS<sup>a</sup>, D. SAURY<sup>b</sup>

a. Universidad Técnica Federico Santa María, romain.gers@usm.cl

b. Institut Pprime, UPR CNRS 3346, CNRS - ENSMA - Université de Poitiers,  
florian.moreau@ensma.fr

## Résumé :

*La cavité différentiellement chauffée est le modèle qui permet d'étudier le transfert de chaleur qui intervient dans de nombreux procédés industriels, depuis l'échelle du microprocesseur jusqu'à celle de la climatisation d'un immeuble ou d'une centrale nucléaire. Deux des faces verticales qui se font face ont des rôles opposés : l'une réchauffe, l'autre refroidit. Les autres faces sont adiabatiques. Afin d'augmenter ce transfert dans une cavité remplie d'air et de rapport de forme 4 :1 (hauteur-largeur), nous perturbons la couche limite qui se développe sur la paroi chaude verticale, par un cylindre perpendiculaire conducteur ou non, à sa base. Nous présentons des résultats de simulations numériques directes obtenues par la méthode des éléments spectraux, solutions des équations de Navier-Stokes-Boussinesq 3D. Ceux-ci montrent l'influence de la hauteur, du diamètre et des propriétés thermiques du cylindre sur le transfert de chaleur pour un nombre de Rayleigh de  $10^8$ .*

## Abstract :

*Heat transfer enhancement in natural convection systems is a challenge for many industrial processes, such as nuclear reactor cooling, electronic circuits or building's ventilation. Differentially heated cavity (DHC) is a suitable configuration to study it, since the boundary conditions are well controlled. A key factor to succeed in is to destabilize the thermal boundary layers in order to enhance the temperature gradient at the walls. The vertical DHC chosen is filled with air and has an aspect ratio of 4/1 (height/width). In this work, we numerically study the influence of a cylinder located at the bottom of the hot wall, perpendicular to it, for a Rayleigh number of  $10^8$ . Direct Numerical Simulations of the three-dimensional Navier-Stokes-Boussinesq equations were performed using the spectral element method. Numerical results show the influence of the height, the diameter and the conductive property of the cylinder on the heat transfer.*

**Mots clefs : DNS, Méthode des Eléments Spectraux, convection naturelle, perturbation thermique et mécanique, cavité différentiellement chauffée**

## 1 Introduction

La convection naturelle en cavité a été le sujet de nombreux travaux expérimentaux et numériques ces dernières années [1, 2]. On peut y distinguer deux groupes principaux : les cavités différentiellement chauffées (CDC) par un gradient vertical de température aligné avec la gravité (configuration de Rayleigh-Bénard), celles chauffées par un gradient horizontal que l'on étudie ici. Contrairement aux premières, il n'existe pas dans les secondes de régime diffusif puisque la flotabilité met immédiatement en mouvement le fluide. L'étude des écoulements laminaires ou turbulents dans la cavité revêt une importance capitale pour contrôler le transfert de chaleur à l'échelle des microprocesseurs [4] comme à celle d'une centrale nucléaire [3], en passant par l'air conditionné d'un édifice [5]. Afin d'augmenter ce transfert de chaleur, il semble nécessaire de rendre les plus turbulentes possible les couches limites près des plaques actives. En effet, plus fines sont ces couches, plus élevé sera le gradient de vitesse à la paroi. Pour ce faire, on peut exciter les ondes présentes dans les couches limites grâce à des perturbations thermiques [7, 8] ou mécaniques [6]. Nous étudions ici numériquement les deux options on mettant un cylindre dans la couche limite chaude qui y perturbe le champ de vitesse puis le champ de température lorsqu'il est non conducteur, et les deux phénomènes en même temps, lorsqu'il est conducteur. Les simulations directes 3D sont menées avec le code ouvert Nek5000 qui résout les équations de Boussinesq-Navier-Stokes par la méthode des éléments spectraux (MES). Tous les résultats présentés correspondent à un nombre de Rayleigh  $Ra_H = 1.1 \cdot 10^8$  et un numéro de Prandtl  $Pr = 0.71$  (air).

## 2 Présentation de la cavité étudiée et des méthodes numériques pour résoudre l'écoulement

### 2.1 Description de la cavité étudiée

Dans ce travail, on étudie l'écoulement de convection naturelle dans une cavité dont la hauteur  $H = 1$  est quatre fois plus grande que la largeur de sa base carrée (voir Fig 1).

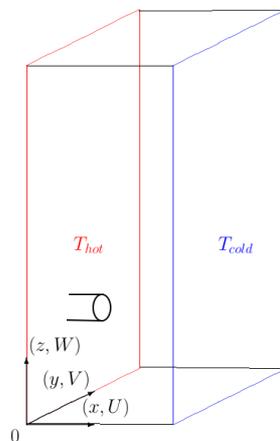


FIGURE 1 – Schéma de la cavité et position de l'obstacle

La paroi verticale chaude se situe en  $x = 0$ , la paroi opposée froide en  $x = 0.25$  Les parois

inférieure et supérieure, ainsi que les parois arrière ( $y = 0.25$ ) et avant ( $y = 0$ ), sont adiabatiques ( $z = 0$  et  $z = 1$  resp.). L'obstacle cylindrique se trouve dans le plan median de la face chaude  $x = 0$ , à une hauteur  $z = 0.25$ . Son diamètre,  $\phi$ , vaut 2 ou 4 cm, et sa hauteur,  $h$ , 1 cm, 2 cm ou 4.3 cm. La variation de la hauteur permet de perturber différentes zones de la couche limite verticale en supposant que le cylindre le plus petit modifie l'intérieur de la couche limite, le moyen affleure celle-ci, et le plus grand fait interagir l'écoulement de proche paroi avec le coeur de la cavité. Le changement de diamètre du cylindre a pour but de varier la taille du sillage qui présente on l'espère une allée de von Kármán. Finalement le cylindre est isolant ou conducteur sur tout sa surface.

## 2.2 Modélisation

### 2.2.1 Système d'équations sans dimension

Nous calculons les variables pression, vitesse et température en résolvant les équations de Boussinesq-Navier-Stokes. L'approximation de Boussinesq, à condition de considérer de faibles variations de température, permet de négliger les variations de densité du fluide tout en maintenant une force de flottabilité verticale. Afin d'obtenir les équations en forme adimensionnelle, nous choisissons les variables de référence suivantes : l'échelle de longueur  $L_{ref} = H$ , l'échelle de température  $\Delta T = T_{hot} - T_{cold}$ , le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ , le nombre de Rayleigh  $Ra_H = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu}$ , l'échelle de vitesse  $V_{ref} = \frac{\alpha\sqrt{Ra_H}}{H}$ , la pression  $\rho V_{ref}^2$ , l'échelle de temps  $t_{ref} = \frac{H^2}{\alpha\sqrt{Ra_H}}$ . Définissant  $u$ ,  $v$  et  $w$  les 3 composantes de la vitesse,  $P$  la pression,  $Pr\theta$  la force de flottabilité,  $\theta = \frac{T - T_m}{T_{hot} - T_{cold}}$  la température sans dimension qui varie entre 0.5 (paroi chaude) et -0.5 (paroi froide), ces équations de conservation sans dimension respectivement de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Pr}{\sqrt{Ra_H}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Pr}{\sqrt{Ra_H}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{Pr}{\sqrt{Ra_H}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Pr\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{Ra_H}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

Comme le nombre de Prandtl est constant ici ( $Pr = 0.71$  pour l'air), les solutions de ces équations ne dépendent que du nombre de Rayleigh en général. Mais on maintient aussi ce dernier constant à la valeur  $Ra_H = 10^8$ , qui correspond à la transition entre les états stationnaire et instationnaire.

## 2.3 Résolution numérique

Nous résolvons ce système d'équations par la méthode des éléments spectraux  $P_n$ - $P_{n-2}$  programmée dans le code libre Nek5000 [9, 10]. Les polynômes orthogonaux utilisés sont ceux de Lagrange. Dans chaque élément les points d'interpolation suivent une distribution de Gauss-Lobatto-Legendre d'ordre  $n$  pour la vitesse et la température, de Gauss-Legendre d'ordre  $n - 2$  pour la pression. Le schéma global de résolution est semi-implicite : schéma implicite backward d'ordre 3 (BDF3) pour les termes diffusifs et temporel, extrapolation du terme non linéaire

d'ordre 3 (EXT3), schéma implicite pour le gradient de pression. Il s'avère qu'un polynôme d'ordre 7 pour la vitesse et 5 pour la pression ont été des compromis acceptables entre précision et temps de calcul. Le maillage utilisé comporte approximativement 30000 éléments et le pas de temps est maintenu constant à 0.01.

### 3 Résultats et discussions

Nous avons d'abord simulé le cas de référence qui correspond à la cavité sans perturbation. Ces premières simulations ont permis de trouver le maillage adéquat pour  $Ra = 10^8$ . Nous présentons maintenant les effets du cylindre sur le transfert de chaleur dans la cavité, en fonction de sa hauteur,  $h$ , de son diamètre  $\phi$  et de sa capacité conduire la chaleur.

#### 3.1 Effet global du cylindre sur les transferts à la paroi

Afin de quantifier le transfert de chaleur aux parois chaude et froide, nous employons le nombre de Nusselt moyen, défini de la manière suivante  $\langle Nu \rangle_{c,f} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{A} \iint_S \pm \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0,L} dt dA$  où  $T$  est le temps simulé,  $A$  la surface de la paroi chaude avec cylindre ou de la paroi froide. La Table 3.1 reporte les valeurs du nombre de Nusselt moyen en temps et en espace pour tous les cas simulés, ainsi que ses valeurs maximales, la variation de la superficie conductrice de la plaque chaude due au cylindre  $\Delta S_{utile}$ , et la stratification qui est la pente du profil vertical de température au centre de la cavité.

Cas		$Nu_{x=0}$	$Nu_{x=0.25}$	$Nu_{x=0}^{max}$	$Nu_{x=0.25}^{max}$	$\Delta S_{utile}$	<b>S</b>
Cas de référence		<b>30.88</b>	<b>30.88</b>	95.44	95.44	-	0.999
Diam. 2 [cm]	1 cm conducteur	30.13	31	95.76	95.2	0.93%	0.998
	1 cm isolant	30.74	30.74	95.68	95.38	-0.47%	0.995
	2 cm conducteur	29.74	31.32	95.63	95.39	1.87%	1.052
	2 cm isolant	30.72	30.72	96.03	95.29	-0.47%	0.988
	4.3 cm conducteur	28.81	31.96	92.32	95	4.01%	1.54
	4.3 cm isolant	30.72	30.72	96.16	95.28	-0.47%	0.991
Diam. 4 [cm]	1 cm conducteur	29.25	31.12	95.98	95.56	1.87%	0.994
	1 cm isolant	30.47	30.47	95.87	95.5	-1.87%	0.998
	2 cm conducteur	28.68	31.69	93.27	96.07	3.74%	0.995
	2 cm isolant	30.41	30.41	96.42	95.7	-1.87%	0.983
	4.3 cm conducteur	27.18	32.67	90.52	95.79	8.04%	1.868
	4.3 cm isolant	30.37	30.37	96.56	95.7	-1.87%	0.968

TABLE 1 – Valeurs moyennes spatio-temporelles y maximales du nombres de Nusselt, sur les parois chaude ( $x = 0$ ) et froide ( $x = 0.25$ );  $\Delta S_{utile}$  variation de la superficie conductrice de la plaque chaude due au cylindre, et stratification  $S$ .

L'égalité des valeurs du nombre de Nusselt aux parois chaude et froide dans le cas de référence,  $Nu = 30.88$ , confirme la qualité des résultats. De même, lorsque le cylindre est non conducteur, l'égalité se maintient. Il apparaît ensuite clairement que le cylindre non conducteur diminue le transfert dans tous les cas. La baisse du transfert se renforce quand augmente la superficie du cylindre. A ce stade on peut supposer que le frottement dû au cylindre freine l'écoulement convectif qui assure le transfert à la paroi. Le cylindre conducteur a lui l'effet inverse. Ainsi on voit logiquement que plus la superficie du cylindre conducteur est grande, plus grand est le

transfert de chaleur. Enfin on peut noter que lorsque le cylindre est conducteur, le nombre de Nusselt de la paroi chaude est toujours inférieur à celui du cas de référence. Au contraire, à la paroi froide, le nombre de Nusselt est toujours supérieur à celui du cas de référence. A noter aussi que la variation de surface chauffante est due au fait que si le cylindre est isolant, la plaque perd la superficie qui correspond à sa base ; quand le cylindre conduit la chaleur, s'ajoute à la surface de la plaque, la surface latérale du cylindre. A continuation nous présentons quelques profils horizontaux de température et de vitesse verticale pour décrire les modifications de l'écoulement dans la CDC.

### 3.2 Visualisation des profils horizontaux de température et de vitesse verticales dans le plan médian vertical

Lorsque le cylindre est non conducteur (pour la paire gauche de la figure 2), on voit que quelque soit la hauteur et le diamètre du cylindre, le coeur et la couche limite froide, dynamique ou thermique, ne sont presque pas modifiés. A la plaque chaude, on vérifie les résultats de la table 3.1 à savoir que plus le volume du cylindre est gros, de part son diamètre ou sa hauteur, plus le nombre de Nusselt diminue. En ce qui concerne la vitesse, le comportement de la vitesse

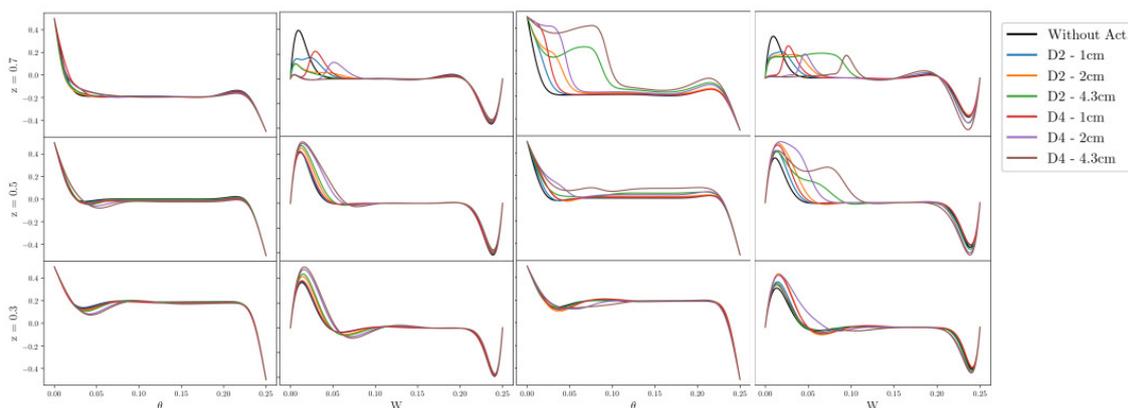


FIGURE 2 – Profils horizontaux de température et de vitesse verticale aux côtes 0.3, 0.5 et 0.7, paire gauche pour le cylindre isolant, paire droite pour celui conducteur, en fonction de la hauteur du cylindre.

moyenne verticale  $W$  à  $z = 0.7$  diffère du comportement à  $z = 0.3$  et  $z = 0.5$ . A ces deux dernières côtes, plus le cylindre occupe un volume important, plus la vitesse ascendante est grande. Tout le contraire se produit à  $z = 0.7$ . Lorsque le cylindre est conducteur maintenant, il joue le rôle d'une ailette. L'énergie qu'il apporte favorise la propagation de la chaleur, surtout à  $z = 0.7$ . On voit clairement que la température du coeur de la cavité augmente un peu. Au niveau des profils de vitesse, on observe que la vitesse descendante a tendance à augmenter le long de la paroi froide, même si le coeur reste relativement immobile. On remarque à nouveau que les perturbations générées par le cylindre, on le rappelle situé à  $z = 0.25$ , se font sentir bien en aval. A  $z = 0.7$ , si pour le cylindre de diamètre 2 cm nous obtenons des profils presque plats et d'intensités égales, pour le cylindre de diamètre 4 cm on voit que : à mesure qu'augmente la hauteur, la couche limite se déplace vers le centre de la cavité ; apparaît une zone morte entre cette couche limite et la paroi. Le cylindre modifie donc totalement l'écoulement de la cavité.

## 4 Conclusions

L'étude numérique à  $Ra_H = 1.1 \cdot 10^8$  de l'influence d'un cylindre fixé à la base de la plaque chaude d'une CDC montre que, si celui-ci est isolant, le transfert de chaleur baisse ; si le cylindre chauffe la cavité, le transfert croît logiquement, mais seulement à la paroi froide et baisse à la paroi chaude où il est installé. Donc un cylindre isolant ne perturbe pas suffisamment les couches limites à ce nombre de Rayleigh pour augmenter le transfert de chaleur. Il faut maintenant poursuivre l'étude pour un nombre de Rayleigh turbulent, typiquement  $Ra_H = 10^{10}$ .

## Remerciements

Les auteurs remercient le Projet Fondecyt 1171281 et l'infrastructure du supercalculateur NLHPC (ECM-02).

## Références

- [1] A. Bejan, A. D. Kraus, Heat transfer handbook, John Wiley and Sons, Inc, 2003.
- [2] O. Martynenko, Natural Convection in Enclosures, Springer, 2005, pp. 279–343.
- [3] L. Qian, S. Qiu, D. Zhang, G. Su, W. Tian, Numerical research on natural convection in molten salt reactor with non-uniformly distributed volumetric heat generation, Nuclear Engineering and Design 240 (4), 796–806, 2010.
- [4] H. Kim, B. An, J. Park, D.K.Kim, Experimental study on natural convection heat transfer from horizontal cylinders with longitudinal plate fins, Journal of Mechanical Science and Technology 27, 2013.
- [5] L. Moosavi, N. Mahyuddin, N. A. Ghafar, M. Ismail, Thermal performance of atria : An overview of natural ventilation effective designs, Renewable and Sustainable Energy Reviews 34, 654–670, 2014.
- [6] Y. Jaluria, B. Gebhart, An experimental study of nonlinear disturbance behaviour in natural convection, Journal of Fluid Mechanics 61, 337–365, 1973.
- [7] F. Penot, O. Skurtys, D. Saury, Preliminary experiments on the control of natural convection in differentially-heated cavities, International Journal of Thermal Sciences 49, 1911–1919, 2010.
- [8] P. Chorin, F. Moreau, D. Saury, Heat transfer modification induced by a localized thermal disturbance in a differentially-heated cavity, International Journal of Thermal Sciences 125, 101–110, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.11.018>.
- [9] P. F. Fischer, J.W. Lottes, and S.G. Kerkemeier. Nek5000 : open source spectral element cfd solver, 2016. <https://nek5000.mcs.anl.gov>
- [10] G. E. Karniadakis and S. Sherwin. Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics. Oxford Science Publications. 2005.