

Micromécanique et comportements de géomatériaux : enjeux et défis d'un mariage d'intérêt

Djimédo KONDO ¹

Sorbonne Université, Institut Jean le Rond d'Alembert - UMR CNRS 7190, djimedo.kondo@upmc.fr

Résumé :

L'étude du comportement des matériaux du génie civil (sols, roches, bétons) connaît depuis quelques décennies des progrès remarquables tant sur le plan de la caractérisation fine des mécanismes de déformation que des modélisations de phénomènes multiphysiques associés. Il s'avère que certaines des avancées réalisées tiennent au déploiement sans précédent d'approches par changement d'échelles prenant en compte certaines spécificités des géomatériaux. Cette communication vise à illustrer ce propos en nous appuyant sur plusieurs développements récents. Dans un premier temps, nous présenterons et discuterons brièvement quelques résultats portant sur la micromécanique de géomatériaux quasi fragiles qui, par nature, sont susceptibles à de la multifissuration évolutive sous chargements (poro)mécaniques. Une seconde partie, portant sur des travaux plus récents, concernera le comportement non linéaire des roches poreuses ductiles (craies, argilite, etc.) pour lesquelles le couplage entre phénomènes de compaction de pores et déformation plastique par cisaillement s'avère crucial. Dans ce cadre, l'apport essentiel de diverses approches d'homogénéisation non linéaire sera souligné. L'argilite du Callovo Oxfordien, envisagé comme hôte de stockage souterrain de déchets radioactifs, constitue un exemple de géomatériau poroplastique pour lequel il conviendra de s'intéresser aussi aux phénomènes de rupture autour des ouvrages qui y sont construits. Enfin, nous indiquerons comment certains des résultats établis ont pu être étendus au contexte des (géo)matériaux nanoporeux où les effets de taille de pores sont manifestes.

Abstract :

Remarkable progresses have been recently made for the characterization and modeling of geomaterials mechanical behavior. It turns out that some of the advances are due to the unprecedented effort in upscaling techniques with a particular account of specific aspects of this class of materials. This communication aims at illustrating that, by relying on several recent developments. First, we will present and discuss some micromechanical results established for microcracked media and their consideration for the formulation of damage models in the context of quasi-brittle geomaterials under (poro)mechanical loadings. Then, a second part is devoted to the nonlinear behavior of ductile porous rocks (chalk, argillite, etc.) in which the coupling between pore compaction phenomena and shear plastic deformation proves to be crucial. In this context, the contribution of limit analysis-based homogenization will be highlighted. The Callovo Oxfordian argillite, a potential host of underground waste storage, is another example of poroplastical material for which, beyond the mechanical behavior, rupture phenomena around

1. Cette communication s'appuie sur divers travaux ayant impliqué des collègues que je voudrais associer : L. Dormieux et E. Lemarchand (Navier, ENPC), F. Bignonnet (Gem, Université de Nantes), S. Brach (Mech. Eng., Caltech), L. Cheng (Université de Lorraine), G. De Saxcé et J-F. Shao (Université de Lille), C. Bouby (LEM3, Université de Lorraine), F. Pastor, J. Pastor (Université de Savoie), H. Weleman (ENI Tarbes).

underground structures must be also investigated. Finally, we will provide few words on the extension of the results to nanoporous geomaterials for which pore size effects must be accounted for.

Mots clefs : Géomécanique, Micromécanique, Milieux poreux, Endommagement, Poroplasticité, Analyse limite

1 INTRODUCTION

La mécanique des matériaux du génie civil est un domaine de recherche dont la richesse tient non seulement à la diversité des objets d'étude (sols, roches, matériaux cimentaires), mais également aux couplages multiphysiques dont ils sont le siège. Malgré cette diversité, les comportements non linéaires des géomatériaux ont été d'abord modélisés dès les années cinquante en s'appuyant sur le cadre naissant de la théorie de l'élastoplasticité, étendu alors par la prise en compte des effets de pression de confinement (contraintes hydrostatiques). Le critère de plasticité proposé par Drucker et Prager [30] a constitué un premier pas dans cette direction, par la considération du premier invariant du tenseur des contraintes en plus de la contrainte équivalente de von Mises, ce qui a ainsi permis de décrire des comportements plastiquement dilatants. Il a été suivi par d'autres travaux basés sur la considération du critère de Mohr-Coulomb (dépendance avec les 3 invariants isotropes du tenseur des contraintes) pour décrire la surface de charge plastique, étendant ainsi le champ d'étude des matériaux cohésifs frottants (cf. par exemple [94]; [83], etc.). Un autre aspect dans le développement de la géomécanique est l'introduction des modèles de plasticité non associée (règle d'écoulement plastique donnée par un potentiel distinct de la fonction de charge plastique) (cf. [78]) pour rendre compte avec précision des variations de volume (dilatance) plastiques. Outre ces aspects, il convient également de faire mention des travaux expérimentaux et de modélisation réalisés à Cambridge dans les années 60 sur les argiles [95] et qui ont notamment permis d'introduire le concept d'état critique (un sol peut être contractant ou dilatant selon la position du trajet de chargement imposé par rapport à la ligne d'état critique).

Sur un tout autre plan, on soulignera aussi l'importance de la prise en compte d'un ou des fluides saturant l'espace poral des géomatériaux. Le domaine d'étude correspondant est celui de la poromécanique dont les travaux pionniers sont ceux de Maurice Biot [8]. On y reviendra.

Les années 70 puis 80 ont fourni l'occasion de conforter ces fondements dans plusieurs directions, à l'aide de travaux essentiellement à caractère phénoménologique. On retiendra par exemple :

i) une phase intense de développement de modèles d'élasto(visco)plasticité pour les géomatériaux, avec en particulier des études portant sur leur mise en œuvre numérique dans le cadre de méthodes d'Elements Finis. Cela a par exemple permis l'investigation des phénomènes de localisation de déformations et de rupture dans les roches, les bétons et surtout les sols (cf. notamment travaux de plusieurs équipes de chercheurs de l'ex Greco Géomatériaux).

ii) les premiers travaux sur l'endommagement des matériaux quasi fragiles, et en particulier des bétons (cf. notamment [76] [6]). Ces recherches ont fait suite à ceux formalisés notamment en France, par J. Lemaitre et J.L. Chaboche (voir [63]) (voir aussi [73], [74], et d'autres auteurs), en lien avec le cadre des matériaux standard généralisés introduits quelques années auparavant par Halphen et Nguyen [47] (Voir également [38]; et plus récemment [79]). De nature purement macroscopique, elles ont été prolongées dans les années 90 par divers auteurs les étendant notamment à la prise en compte des effets d'anisotropie induite par l'endommagement (cf. par exemple [17]; [44] pour des roches).

Les années 90 et 2000 ont constitué de manière générale un véritable tournant pour la géomécanique

française, et ce pour plusieurs raisons dont :

- tout d'abord, la formalisation et l'extension de la mécanique des milieux poreux saturés ou non saturés dans un cadre thermodynamique adéquat par Olivier Coussy et son groupe (voir par exemple [21]), ce qui a permis d'aboutir à un cadre poromécanique général permettant la prise en compte de processus irréversibles.
- l'avènement et l'essor des méthodes d'imagerie en géomécanique (presqu'en même temps que dans d'autres champs de la mécanique des matériaux), ce qui a favorisé des progrès significatifs en matière de compréhension des mécanismes de déformations à diverses échelles et dans le domaine de la caractérisation fine de la réponse des géomatériaux sous sollicitations (hydro)mécaniques. S'agissant des sols, on mentionnera les travaux réalisés pendant de nombreuses années au sein du Greco Géomatériaux et en particulier au laboratoire 3SR (voir par exemple la synthèse récente par J. Desrues et al. [23]); pour les roches avec ou sans saturation, ceux réalisés dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique des Solides et le Laboratoire Navier (voir à ce titre [101], [104]). Enfin, sur les matériaux cimentaires on notera divers travaux effectués à l'Université Lille sur des bétons, avec une attention particulière aux phénomènes de multifissuration et aux évolutions de microstructure sous diverses conditions hydriques (pour l'analyse de la durabilité). Une mention particulière doit être faite de travaux très récents menés au Laboratoire de Mécanique et Technologie sur des bétons et qui ont conduit à la mise en place d'un benchmark très complet incluant la caractérisation de la fissuration dans ces matériaux [15].
- le déploiement sans précédent d'approches de modélisations par changement d'échelles pour des comportements non linéaires de géomatériaux. Pour les milieux granulaires, on notera l'essor des outils de simulations numériques discrètes, à Grenoble et à Montpellier (travaux au 3SR et au LMGC)².

S'agissant des géomatériaux plus cohésifs, des efforts ont porté d'une part sur ceux réputés quasi fragiles (par exemple granite, grès, matériaux cimentaires etc..) et pour lesquels la multifissuration constitue le principal mécanisme de déformation et de rupture, et d'autre part sur ceux plus ductiles et poreux (Argilite, craies, etc..) et qui sont le siège de comportements dissipatifs complexes mettant en jeu plasticité et évolutions de microstructures (voir par exemple [103]). De ce point de vue, la microporomécanique est probablement l'un des champs thématiques où les avancées de ces dernières décennies ont été significatives. A ce titre, on pourra se référer à l'ouvrage de Dormieux et al. [25].

C'est principalement sur ces aspects de changement d'échelle en géomécanique que se focalisera la suite de ce texte, avec des objectifs assez modestes. En premier lieu, il s'agira de présenter certains des apports récents de la micromécanique à la formulation de lois de comportements de géomatériaux, tout en insistant plus sur les aspects méthodologiques et le type d'outils mis en œuvre plutôt que sur tels ou tels autres résultats précis pour lesquels on renverra à des articles publiés. Le choix d'une présentation basée sur la distinction entre les roches quasi fragiles et celles qui sont poreuses ductiles est dicté non seulement par la nature différente des micromécanismes en jeu, mais se justifie également par le type d'approches d'homogénéisation non linéaire mis en œuvre pour leur modélisation.

2. Une activité importante se poursuit sur ces simulations discrètes, dans le cadre du GDR International Mege.

2 Homogénéisation et comportement des roches quasi fragiles

Les comportements non linéaires des roches quasi fragiles (grès, granite, etc..) trouvent principalement leur origine dans les phénomènes de nucléation et de croissance de microfissures dans une matrice solide généralement considérée élastique. L'endommagement qui en résulte se trouve ainsi couplé à l'élasticité. Malgré l'apparente simplicité de ce couplage, la modélisation des comportements élastiques endommageables suscite encore de vifs débats, probablement en raison du caractère évolutif du processus, de l'adoucissement qui en résulte, et de la difficulté de prise en compte adéquate des effets de contact unilatéral des lèvres des microfissures. L'anisotropie éventuelle induite par l'endommagement constitue une difficulté supplémentaire. Le lecteur intéressé par la caractérisation de la multifissuration dans les roches quasi fragiles peut, par exemple, consulter [50] sur un granite mécaniquement endommagé ; on notera la complexité des faciès d'endommagement que l'on peut rencontrer sur cette classe de matériaux.

Dans un objectif de formulation de lois d'endommagement des roches quasi fragiles (dans le cadre du formalisme des Matériaux Standard Généralisés dont un bref rappel est présenté en annexe), les principales attentes vis-à-vis de la micromécanique des milieux microfissurés concernent : un choix pertinent de la variable d'endommagement, la détermination de l'énergie libre, et la formulation des lois d'évolutions. Ce sont ces 2 aspects que nous examinons et discutons brièvement dans le reste de cette section.

2.1 Impact de la microfissuration sur l'élasticité macroscopique

Les premières études de ce type sont celles de Budiansky et O'Connell [14] (voir plus tard [51]) en s'appuyant sur des approches de type Eshelby (1957) pour représenter les microfissures à l'aide d'ellipsoïdes aplatis. En France, on mentionnera les études dans les années 80 de Leguillon et Sanchez-Palencia [62] (dans le cadre de l'homogénéisation périodique) puis d'Andrieux et Marigo [3]³. Les travaux de M. Kachanov (fils de L. Kachanov) [54] constituent également des références à mentionner. De cet ensemble, et c'est une première retombée de l'homogénéisation après calcul des propriétés effectives, on retiendra que la variable pertinente pour caractériser l'endommagement n'est pas le volume occupé par les microfissures (qui est de toute façon quasi nulle) mais plutôt le paramètre densité de microfissures, d , initialement introduit par Bristow [13] puis popularisé dans [14]. Dans le cas d'une distribution de microfissures circulaires (penny-shaped) aléatoirement orientées, cette variable d'endommagement est ainsi donnée par :

$$d = \mathcal{N}a^3 \quad (1)$$

dans laquelle \mathcal{N} désigne la densité volumique (nombre par unité de volume) de microfissures et a le rayon moyen des microfissures. On notera que d diffère en effet du volume occupé par les microfissures qui dans le cas présent vaut $\varphi = \frac{4}{3}\pi dX$, avec $X = c/a$ le rapport d'aspect (ouverture sur rayon) des microfissures. Dans un tel cas d'une matrice élastique affaiblie par des microfissures aléatoirement orientées, le tenseur d'élasticité effectif de la roche microfissurée est isotrope et s'écrit de manière générale :

$$\mathbb{C}(d) = 3k(d)\mathbb{J} + 2\mu(d)\mathbb{K} \quad (2)$$

dans laquelle \mathbb{J} et \mathbb{K} sont les projecteurs orthogonaux des tenseurs d'ordre 4 symétriques isotropes : $\mathbb{J} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}/3$, et $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}/3$; \mathbb{I} et $\mathbf{1}$ sont les tenseurs identité d'ordre 4 symétrique et identité d'ordre 2, respectivement. Les grandeurs $k(d)$ et $\mu(d)$ représentent les modules de compressibilité et de cisaillement effectif du milieu endommagé. Leur détermination dépend bien entendu du schéma

3. Une généralisation en 3D de ces travaux peut être trouvés dans [85]

d'homogénéisation utilisé et de l'état ouvert ou fermé des microfissures. Dans le cas des milieux microfissurés, il s'avère que le schéma d'homogénéisation le plus adéquat doit prendre en compte non seulement la géométrie des microfissures mais également leur distribution spatiale, comme c'est le cas dans les travaux de Ponte-Castaneda et Willis [90] qui fournissent des bornes des propriétés élastiques effectives. Ces travaux, réalisés pour des microfissures ouvertes ont pu être étendus aux microfissures fermées dans [26] (pour plus de détail se référer à l'ouvrage de Dormieux et Kondo [28]). En résumé, en notant $\mathbb{C}^s = 3k^s\mathbb{J} + 2\mu^s\mathbb{K}$ le tenseur d'élasticité de la matrice solide supposée isotrope (modules de compressibilité k^s et de cisaillement μ^s), on a :

Pour les microfissures ouvertes :

$$k(d) = k^s \left(1 - \frac{Q_1 d}{1 + Q_3 d} \right) \quad ; \quad \mu(d) = \mu^s \left(1 - \frac{Q_2 d}{1 + Q_4 d} \right) \quad (3)$$

avec $Q_1 = \frac{16}{9} \frac{1-\nu^s}{1-2\nu^s}$, $Q_2 = \frac{32}{45} \frac{(1-\nu^s)(5-\nu^s)}{2-\nu^s}$. De même, $Q_3 = Q_1 \frac{1+\nu^s}{3(1-\nu^s)}$ et $Q_4 = \frac{64}{675} \frac{(4-5\nu^s)(5-\nu^s)}{2-\nu^s}$.

Pour les microfissures fermées :

$$k(d) = k^s \quad ; \quad \mu(d) = \mu^s \left(1 - \frac{Q'_2 d}{1 + Q'_4 d} \right) \quad (4)$$

avec $Q'_2 = \frac{32}{15} \frac{1-\nu^s}{2-\nu^s}$ et $Q'_4 = \frac{64}{225} \frac{4-5\nu^s}{2-\nu^s}$.

Ces résultats indiquent clairement que même fermées, les microfissures non frottantes continuent d'affecter les propriétés effectives via le module de cisaillement, le module de compressibilité étant néanmoins entièrement restitué. On parle de restauration partielle.

En conclusion du point de vue thermodynamique, la micromécanique permet l'obtention des effets du dommage sur l'élasticité effective des matériaux microfissurés en contexte tridimensionnel tout en prenant en compte les effets de refermeture. De fait, elle fournit l'expression du potentiel thermodynamique (énergie libre) du matériau microfissuré :

$$\rho w(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} k(d) (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu(d) \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \quad (5)$$

correspondant à $\mathbb{C}(d) = 3k(d)\mathbb{J} + 2\mu(d)\mathbb{K}$ déjà introduit, avec les expressions précédentes de $k(d)$ et $\mu(d)$ selon l'état ouvert ou fermé de la microfissuration.

2.2 Loi d'évolution de l'endommagement par microfissuration

La formulation complète des modèles d'endommagement par microfissuration nécessite de préciser les lois d'évolution de la variable interne (ici le scalaire d en raison de l'hypothèse d'isotropie). Pour une cohérence complète de la démarche, le pseudo potentiel de dissipation macroscopique devrait être également déduit de l'homogénéisation. Malheureusement, à l'heure actuelle, on ne dispose pas encore d'outils pertinents pour aborder cette question dans un cadre micromécanique. L'une des principales raisons est la difficulté d'obtention de la dissipation macroscopique du milieu contenant des microfissures en interaction, même en admettant à l'échelle microscopique les lois de la mécanique linéaire pour chaque famille de microfissures. Une tentative d'approche a été faite dans [24] et a permis dans une configuration particulière d'établir un lien entre la dissipation d'énergie par endommagement et

celle liée à l'énergie de rupture.

Ceci étant, une première démarche consiste à combiner le raisonnement micromécanique et l'approche thermodynamique (cf. annexe) usuellement considérée pour la formulation des lois de comportement phénoménologiques. En examinant l'expression de la dissipation intrinsèque due à une croissance d'endommagement

$$\mathcal{D} = Y \dot{d} \quad (6)$$

avec $Y = -\rho \frac{\partial w}{\partial d}$, la force thermodynamique associée à d , on postule le pseudo-potential (fonction homogène de degré un, en raison du caractère non visqueux supposé pour l'endommagement) sous la forme :

$$\varphi(\dot{d}) = Y_c \dot{d} \quad (7)$$

d'où se déduit le potentiel dual

$$\varphi^*(Y; d) = \begin{cases} 0 & \text{si } Y - Y_c \leq 0 \\ +\infty & \text{si } Y - Y_c > 0 \end{cases} \quad (8)$$

fonction indicatrice du domaine délimité par le critère d'endommagement

$$f(Y) = Y - Y_c \leq 0 \quad (9)$$

La loi d'évolution de l'endommagement s'obtient classiquement comme :

$$\dot{d} \in \partial \varphi^*(Y; d) \quad (10)$$

où $\partial \varphi^*(Y; d)$ représente le sous différentiel de φ^* . De manière classique, ceci est équivalent à la règle de normalité en considérant le critère (10).

Le critère (10) est du type de celui initialement introduit par [73], avec une possible dépendance de Y_c avec d (par exemple affine), ce qui est nécessaire si l'on adopte le modèle classique basé sur $\mathbb{C}(d) = (1-d)\mathbb{C}^s$. D'où, dans ce cas, un pseudo-potential de dissipation qui prendrait la forme $\varphi(\dot{d}; d) = Y_c(d)\dot{d}$. Il est souhaitable que dans les années à venir des efforts de recherche puissent être aussi dédiés à la caractérisation expérimentale et la formulation sur des bases microscopiques des conditions d'évolution de la microfissuration, c'est-à-dire des énergies dissipées lors de l'évolution collective d'un ensemble de microfissures. C'est une tâche essentielle !

Quelques remarques :

- Les éléments présentés dans les deux sous-sections qui précèdent permettent à priori de construire entièrement un modèle d'endommagement local à base micromécanique, via la contribution de cette dernière à la formulation de l'énergie libre.
- Le formalisme décrit ci-dessus s'étend aisément au contexte d'un couplage entre l'endommagement et la poroélasticité des milieux saturés (voir à ce propos [25])

2.3 Quelques extensions en vue d'applications en géomécanique

La prédominance en géomécanique d'états de contraintes de type compression rend nécessaire la prise en compte à minima des effets de refermeture de microfissures. Sur la base de la construction exposée dans les deux sous-sections précédentes, il s'est agi de construire un modèle d'endommagement à élasticité

multilatérale et qui préserve la continuité de la réponse mécanique du milieu endommagé, lors de la transition entre états de "traction" et états de "compression".

Sur les effets de refermeture de microfissures

Cette question importante a été longtemps débattue notamment en contexte d'endommagement anisotrope (cf. [17]; [44]; [102] [20]). Les problèmes à résoudre sont ceux de la détermination de l'hypersurface séparant les domaines dits de "traction" et de "compression" ainsi que l'expression complète du potentiel thermodynamique. D'un point de vue plus général et dans un contexte d'élasticité non régulière, Curnier et al. [22] ont proposé un cadre pour l'étude des milieux multi-modulaires. L'adaptation des résultats de ces auteurs aux milieux endommagés isotropes conduit à la forme générale suivante de l'énergie libre (cf. par exemple [55]) :

$$\rho w(\boldsymbol{\varepsilon}, \underline{d}) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(d)(tr\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu(d)\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d & \text{si } tr\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ \frac{1}{2}k^s(tr\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu(d)\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d & \text{si } tr\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

Il convient de faire les observations suivantes :

- Le modèle issu de (12) est opérationnel du point de vue macroscopique et possède de bonnes propriétés mathématiques (continuité des grandeurs énergétiques, du critère d'endommagement et de la réponse mécanique sous un chargement arbitraire). On notera que c'est bien le choix fait par [2] (voir aussi [86]) pour la gestion de l'effet unilatéral dans le contexte d'une approche variationnelle de l'endommagement.
- Le modèle déduit de (12) n'est néanmoins pas en complet accord avec les résultats de la micromécanique des milieux microfissurés évoqués en section 2.1. La raison principale est que du point de vue physique l'application d'un chargement déviatorique modifie de fait l'état ouvert ou fermé des microfissures.

Couplage entre endommagement et glissement frottant

Le modèle qui vient d'être esquissé peut s'appliquer à de nombreuses situations en génie civil où les matériaux sont soumis à des chargements à faible triaxialité de contraintes. Toutefois, dans diverses autres configurations, il convient de prendre en compte, en couplage avec l'endommagement, les phénomènes de dissipation par frottement sur les lèvres de microfissures fermées (cf. par exemple [3], [45], [5], [105]). Sans rentrer ici dans des détails techniques des analyses micromécaniques qui risquent d'être tronquées, on précisera simplement que la prise en compte du glissement dissipatif (nouvelle variable interne γ) et de la dilatance (déformation de volume inélastique) à travers un modèle de frottement associé (cf. par exemple [96]) se traduit à l'échelle macroscopique sous la forme d'une loi de comportement similaire à de l'élastoplasticité avec écrouissage cinématique. En mécanique des roches quasi fragiles, le couplage entre la dilatance et le glissement frottant se trouve généralement justifié par les micromécanismes induits par les aspérités des lèvres des discontinuités fermées (cf. [88]).

Pour finir, il convient de souligner que la modélisation complète incluant des microfissures frottantes dilatantes a été appliquée à l'étude des comportements mécaniques de diverses roches quasi fragiles. Le lecteur pourra par exemple dans [105] les résultats d'une large campagne d'évaluation dans le cas d'un granite sollicité en conditions triaxiales vraies.

Couplage entre endommagement et anisotropie primaire

Dans le cas de certains géomatériaux (exemple argilite de Tournemire, schiste), la question de l'impact de l'anisotropie initiale sur les processus d'endommagement s'avère cruciale et soulève des difficultés

importantes sur le plan de la modélisation micro-macro 3D⁴. En contexte bidimensionnel, quelques avancées ont pu être récemment faites en étendant les travaux de [75] à un contexte général incluant la coexistence de microfissures ouvertes et fermées [39] [40]. Dans ce cadre restreint de milieux orthotropes 2D, un modèle d'endommagement couplant les anisotropies primaire et induite (par la multifissuration) a été établi puis validé dans [64] pour une argilite de Taiwan expérimentalement caractérisée par [65]. La question ouverte pour ces modélisations micromécaniques est celle de leur extension au 3D.

2.4 Autres commentaires et ouverture sur des travaux récents

Les travaux brièvement décrits dans cette première partie de la communication ont porté sur l'application des méthodes de changement d'échelle à la modélisation de l'endommagement par microfissuration des (géo)matériaux quasi fragiles. On retiendra que des efforts sont encore à porter sur la construction des lois d'évolution qui, pour l'instant, sont essentiellement de nature phénoménologique. Néanmoins, dans ce cadre, les modèles succinctement décrits ici sont en mesure de rendre compte de certaines spécificités de l'endommagement des géomatériaux quasi fragiles : endommagement avec possibilité de refermeture de microfissures, couplage éventuel avec des phénomènes de dissipation par frottement sur les lèvres de microfissures fermées, dilatance l'accompagnant. De nombreuses applications avaient montré les potentialités de tels modèles qui se trouvent en accord avec des données expérimentales disponibles en laboratoire. Un aspect essentiel dans le développement de ces modèles d'endommagement à base micromécanique est celui de leur traduction numérique dans un code en vue du calcul des structures. Nous avons déjà effectué quelques tentatives dans un code commercial, ce qui a permis de réaliser des calculs pour l'évaluation de zones endommagées autour d'ouvrages souterrains.

Malgré cela, les développements en matière de modèles de calculs de structures endommagées en géomécanique ne peuvent ignorer les progrès récents réalisés dans le domaine des modèles d'endommagement non locaux ou des modèles de zone cohésive dans un contexte purement macroscopique (cf. par exemple [19], [66], [67] pour des applications à des matériaux du génie civil tels que le béton ordinaire). Les formulations variationnelles des modèles d'endommagement régularisés sont très précieuses si on a en tête des calculs de structures/ouvrages de génie civil. On mentionnera tout particulièrement ici les travaux de Pham et al. [87]) qui établissent le lien entre les modèles d'endommagement et ceux de la rupture également formulés dans le cadre variationnel initialement introduit par Francfort et Marigo [36] puis développé sur le plan numérique dans [10] (pour des applications avancées cf. par exemple [99]). Il est intéressant de noter que, afin de préserver les liens avec le problème de la fissure de Griffith (mécanique linéaire de la rupture), le modèle local sous jacent à la plupart des travaux d'endommagement non local requiert généralement une forme particulière du potentiel d'énergie différente de celle esquissée auparavant dans les approches micromécaniques⁵.

En suivant une terminologie présentée en 1985 lors du 7^e Congrès Français de Mécanique à Bordeaux [33], (voir également [35]), et du fait de la forme (7) du potentiel de dissipation, on a affaire à des systèmes dits à dissipation simple, c'est-à-dire *ceux pour lesquels la seule donnée des variables d'état globale à un instant t suffit pour caractériser l'énergie totale dissipée pour amener la structure à cet état*. Dans ces cas, il est possible de construire directement une formulation variationnelle dans laquelle la fonctionnelle à minimiser est basée sur la somme de l'énergie libre et de l'énergie totale dissipée sur la structure. A cette fin, il conviendra de considérer un potentiel de dissipation régularisé en lieu et place

4. Pour les quelques tentatives à caractère macroscopique se référer par exemple à l'ouvrage [29] ou [46]

5. Il convient de souligner la variété des applications que connaît l'approche variationnelle (voir par exemple [99], ou pour des matériaux cimentaires [81]). Des applications sous chargements de compression sont à souhaiter.

de (7) sous la forme

$$\varphi(\dot{d}, \nabla \dot{d}) = Y_c \left(\dot{d} + l^2 \nabla d \cdot \nabla \dot{d} \right) + I_+(\dot{d}). \quad (13)$$

ce qui préserve le caractère de milieu à dissipation simple, et de se placer dans le cadre de la thermodynamique des milieux à gradient (voir à ce sujet la récente publication de Nguyen Q.S. [80]).

Cette démarche aboutit à la minimisation de la fonctionnelle (à deux champs) suivante, définie sur la structure occupant le domaine Ω :

$$\mathcal{P}(\underline{u}, d) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}(d) : \underline{\underline{\varepsilon}} + Y_c \left(d + \frac{1}{2} l^2 (\nabla d \cdot \nabla d) \right) \right) d\Omega - W_{\text{ext}}(\underline{u}), \quad (14)$$

dans laquelle W_{ext} représente le travail des forces extérieures appliquées. La fonctionnelle (14) peut être reliée à celle issue de l'approche variationnelle de la rupture en écrivant une équivalence entre l'énergie de rupture et celle dissipée lors du processus d'endommagement (voir par exemple [87]).

Enfin, revenant à l'homogénéisation, il convient d'attirer aussi l'attention sur ses difficultés actuelles à obtenir par voie micro-macro des lois d'endommagement à gradient ou des lois non locales. On fera juste une mention des travaux de Drugan et Willis [32] qui ont été récemment mis en œuvre par Oliver-Leblond et al. [82] à cette fin.

3 Homogénéisation et plasticité des roches poreuses ductiles

Les modélisations micromécaniques des roches poreuses ductiles présentées dans cette section s'appuient sur des méthodes assez différentes de celles décrites dans la section qui précède. Il s'agit principalement de méthodes combinant analyse limite et homogénéisation de type Hill-Mandel telles qu'elles ont été amorcées dans les travaux pionniers de Gurson [42] sur les métaux poreux. Soulignons aussi l'importance des travaux basés sur des approches variationnelles d'homogénéisation non linéaire (cf. [5] et [71], [7]) à la suite de celles introduites par [89] et [97] (cf. également [98]). L'ensemble des développements auxquels nous avons pris part ces dernières années ont porté sur :

- des géomatériaux ductiles poreux dont la matrice est plastiquement dilatant. A titre d'exemple, dans le cas d'un matériau poreux à matrice de type Mohr-Coulomb, la difficulté principale pour l'homogénéisation provient du fait que ce critère dépend de tous les invariants du tenseur des contraintes (en pratique, de la pression, de la contrainte équivalente de Von Mises et de l'angle de Lode) et est de plus irrégulier (régime de face, d'arête, etc.).
- des géomatériaux poreux dont la matrice est de type Drucker-Prager non associé. Pour ces travaux, réalisés principalement dans le cadre de la thèse de doctorat de L. Cheng (coencadrée avec G. De Saxcé de l'Université de Lille), nous avons eu recours à l'approche par Bipotentiel qui permet une extension rigoureuse du cadre des Matériaux Standard Généralisés (MSG), et par suite des méthodes d'analyse limite au contexte de la plasticité non associée.
- des milieux granulaires poreux ; ces développements ont été principalement portés par le groupe de L. Dormieux au Laboratoire Navier (voir par exemple publications [48], [70]). De manière remarquable, ils ont abouti à l'établissement d'un lien avec les modèles de type Cam-Clay (voir [7]).

A titre d'illustration, on se focalisera uniquement sur le premier cas pour lequel nous avons mis en œuvre et adapté l'approche par Analyse Limite classique. S'agissant du second point, le lecteur intéressé pourra se référer à [18]. En ce qui concerne les roches poreuses granulaires, nous renvoyons à [7]. L'objectif

de cette sous-section n'est pas de présenter, même brièvement, la théorie de l'analyse limite, mais de préciser comment elle s'applique aux milieux poreux ductiles dans l'esprit des travaux de Gurson. Pour les fondements, il conviendra de se reporter aux travaux de Hill [49] et [31]⁶. L'ouvrage [92], donne un aperçu complet, y compris pour des applications en mécanique des sols.

Pour les milieux poreux ductiles, on vise à déterminer la surface de plasticité macroscopique qui suffit en pratique pour formuler la loi de comportement poroplastique (cf. seconde remarque ci-dessous). A cette fin, l'idée consiste à appliquer l'approche cinématique, dite par l'extérieur, sur une cellule (Ω) sous la forme d'une sphère creuse (la cavité occupe un domaine Ω_p) dont la matrice solide $\Omega_s = (\Omega - \Omega_p)$ est de type rigide plastique parfait (voir Fig :1). La porosité (eulérienne) est alors définie par $f = a^3/b^3$. La sphère creuse est soumise à des conditions de taux de déformation homogène au bord. D'où

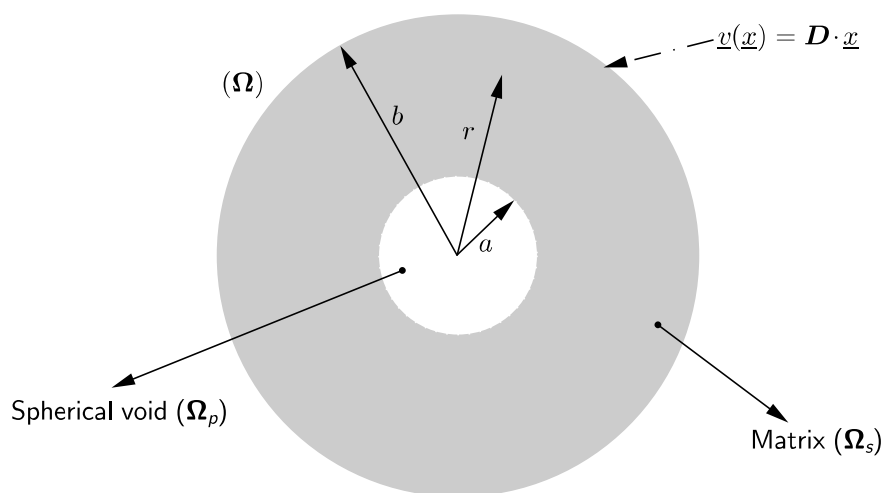


FIGURE 1 – Cellule de sphère creuse.

l'ensemble des champs de vitesse \underline{v} (auquel est associé le champ des taux de déformation $\underline{d}(\underline{x}) = (\nabla \underline{v}(\underline{x}) + {}^T \nabla \underline{v}(\underline{x})) / 2$) cinématiquement admissible

$$\mathcal{K}_a = \{\underline{v} \mid \underline{v}(\underline{x}) = \mathbf{D} \cdot \underline{x}, \forall \underline{x} \in \partial\Omega\} \quad (15)$$

dans lequel \mathbf{D} représente le tenseur des taux de déformation macroscopique imposé.

La surface de plasticité de la matrice, domaine convexe \mathcal{C} , est donnée par une fonction $\mathcal{F}(\underline{\sigma})$, de sorte que le champ de contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x})$ plastiquement admissible est tel que

$$\mathcal{C} = \{\underline{\sigma}(\underline{x}) \in \mathcal{S}_a \mid \mathcal{F}(\underline{\sigma}) \leq 0, \forall \underline{x} \in \Omega\} \quad (16)$$

où \mathcal{S}_a représente l'ensemble des champs statiquement admissibles.

La donnée du critère est strictement équivalente à celle de la fonction d'appui du domaine convexe \mathcal{C} qu'il définit :

$$\pi(\underline{d}) = \sup \{\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in \mathcal{C}\} \quad (17)$$

Par application à la cellule poreuse de l'approche cinématique d'analyse limite et en s'appuyant sur le lemme de Hill-Mandel, on montre que les états de contraintes macroscopiques admissibles $\underline{\Sigma} =$

6. La note récente [61] apporte des précisions sur l'articulation entre ces 2 travaux.

$\langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = (1-f) \langle \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \rangle_{\Omega_s}$ sont tels que pour tout tenseur de taux de déformation macroscopique \mathbf{D} :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \leq \Pi(\mathbf{D}) \equiv \min \{ \langle \pi(\mathbf{d}) \rangle_{\Omega} \mid \underline{v}(\underline{x}) \in \mathcal{K}_a \text{ et } \mathbf{d}(\underline{x}) \text{ P.A.} \} \quad (18)$$

dans lequel $\langle \bullet \rangle_{\Omega}$ désigne la moyenne \bullet sur le domaine Ω .

$\Pi(\mathbf{D})$ apparait ainsi comme la fonction d'appui de l'ensemble convexe $\tilde{\mathcal{C}}$ des états de contraintes macroscopiques :

$$\sup \{ \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \mid \boldsymbol{\Sigma} \in \tilde{\mathcal{C}}, \forall \mathbf{D} \} = \Pi(\mathbf{D}) \quad (19)$$

où

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{ \boldsymbol{\Sigma} \mid \exists \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \in \mathcal{C} \}$$

Il vient alors que

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \quad (20)$$

définit une borne supérieure de la surface de plasticité macroscopique du poreux à laquelle on peut faire correspondre une fonction de charge plastique macroscopique $\mathcal{F}(\boldsymbol{\Sigma})$.

Cette démarche dont on peut également trouver le détail dans [60] a été initialement appliquée par Gurson [42] pour déduire la surface de plasticité de métaux poreux. Dans ce cas, un critère de von Mises a été adopté pour la matrice métallique, ce qui correspond à la fonction d'appui suivante :

$$\pi(d) = \sigma_0 d_{eq} \quad (21)$$

où σ_0 est la contrainte seuil de plasticité et d_{eq} le taux de déformation plastique équivalent au sens de von Mises.

Le résultat final obtenu par Gurson se présente sous la forme du critère macroscopique bien connu :

$$F(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left(\frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 \quad (22)$$

A ce stade on peut faire les remarques suivantes :

- La présence tout à fait remarquable de la contrainte hydrostatique Σ_m (premier invariant du tenseur de contrainte macroscopique) dans le critère provient de la porosité. L'absence du troisième invariant du déviateur des contraintes macroscopiques, J_3 , n'est d'ailleurs due qu'à des approximations de calcul (tout à fait justifiées !), plusieurs tentatives récentes ayant conduit à une faible importance de cet invariant. Enfin, on notera qu'à porosité f nulle, on retrouve trivialement le critère de von Mises.
- La formulation du modèle de Gurson est obtenue en complétant le critère macroscopique obtenu par la règle de normalité qui se transpose rigoureusement à l'échelle macroscopique pour la déformation plastique et par la loi d'évolution de la porosité, aisément déduite de celle de la conservation de la masse, en tenant compte de l'incompressibilité de la matrice plastique. Le statut de la porosité f dans le modèle de Gurson mérite d'être précisé puisqu'à l'évidence elle n'intervient pas dans la dissipation macroscopique du milieu poreux. Il est intéressant de souligner que la réponse à cette question peut être obtenue, comme établi dans [7], en se référant à la poroplasticité des milieux saturés telle qu'exposée par exemple dans [21] (pour les roches poreuses, le lecteur pourra se référer à [103]). Il en ressort que la variable pertinente du point de vue thermodynamique est la porosité plastique lagrangienne ϕ^p (et non la porosité eulérienne

f) à laquelle est associée la pression de fluide en tant que variable duale. En considérant alors l'extension du modèle de Gurson aux milieux poreux saturés à matrice plastiquement incompressible, on peut aisément vérifier que le modèle de Gurson entre bien dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés et que l'équation de conservation de la masse fait partie intégrante de l'expression du pseudo-potential de dissipation (cf. [9]). De fait, dans le modèle de Gurson, la porosité eulérienne f n'est évidemment pas une variable interne d'endommagement.

3.1 Cas de géomatériaux ductiles poreux

Comme annoncé, on s'intéresse à présent à des géomatériaux poreux dont la matrice solide est dilatante et présente une certaine cohésion. Pour mémoire, on exclut la situation de comportements plastiques non associés pour la matrice et pour lequel on se réfère plutôt à [18]. L'investigation des milieux poreux avec une matrice dilatante de type Drucker-Prager associé (critère dépendant de la pression et de la contrainte équivalente de von Mises) a fait l'objet de plusieurs études dont notamment celles de [52], [53] puis [41] effectués dans le cadre de l'approche cinématique d'analyse limite⁷. Sur le plan théorique, le cas de géomatériaux dont la matrice plastique obéit à un critère de Mohr-Coulomb n'a été abordé que très récemment (voir [4]), le cas d'une matrice de Tresca, comparativement plus simple, n'ayant été d'ailleurs traitée qu'en 2014 par [16]. Comme déjà évoqué, la difficulté inhérente au critère de Mohr-Coulomb réside dans son caractère irrégulier, en plus de la dépendance aux trois invariants isotropes du tenseur des contraintes (effet de l'angle de Lode). Pour visualiser ces difficultés nous reporterons juste ici la forme du critère et surtout l'expression de la fonction d'appui correspondant.

A l'aide des valeurs principales des contraintes les 3 invariants s'écrivent

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}, \quad \theta_L = -\frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{27 \det(\boldsymbol{\sigma}')}{2 \sigma_{eq}^3} \right)$$

dans laquelle \mathbf{s} représente le deviateur des contraintes et θ_L l'angle de Lode tel que : $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_L \leq \frac{\pi}{6}$.

Le critère de Mohr-Coulomb s'écrit alors :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_e + \frac{\sin(\phi)}{\zeta(\theta_L)} \left(\sigma_m - \frac{c}{\tan(\phi)} \right) = 0 \quad (23)$$

avec

$$\zeta(\theta_L) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\theta_L) - \frac{1}{3} \sin(\phi) \sin(\theta_L)$$

La fonction d'appui correspondant se présente sous la forme (voir par exemple [92]) :

$$\begin{cases} \pi(\mathbf{d}) = +\infty & \text{si } \text{tr}(\mathbf{d}) < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin(\phi) & (a) \\ \pi(\mathbf{d}) = \frac{c}{\tan(\phi)} \text{tr}(\mathbf{d}) & \text{si } \text{tr}(\mathbf{d}) \geq (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin(\phi) & (b) \end{cases} \quad (24)$$

où les d_i , $i = 1, 2, 3$ représentent les valeurs principales du tenseur taux de déformation \mathbf{d} . De manière classique pour un angle de frottement interne $\phi = 0$, le critère se réduit trivialement à celui de Tresca dont on retrouve par passage à la limite la fonction d'appui correspondant.

Sans rentrer dans des détails techniques, l'obtention du critère de plasticité macroscopique du poreux dans le cas de la matrice plastique de Mohr-Coulomb s'est avéré très compliquée par rapport aux cas

⁷ On mentionnera ici les modélisations de cette classe de matériaux par [5] et [71] à l'aide d'une méthode du type module sécant modifié.

déjà traités dans la littérature. Les difficultés rencontrées ont néanmoins pu être résolues, en s'appuyant sur la solution exacte de la sphère creuse plastique de type Mohr-Coulomb sous chargement hydrostatique (cf. [100]), et surtout en reformulant le problème d'analyse limite sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. C'est après résolution de ce dernier que nous avons pu établir une formulation paramétrique du critère macroscopique du poreux (voir [4]). Cet ensemble a été complété par la règle de normalité qui s'en déduit, et par la loi d'évolution de la porosité qui dépend (à la différence de modèle de Gurson) des 3 invariants du tenseur des taux de déformation.

Pour l'évaluation des prédictions du modèle, ces travaux, comme d'autres non explicités ici, ont tiré profit d'une collaboration de longue date avec Franck et Joseph Pastor qui ont développé sur plusieurs années un outil de calcul d'analyse numérique très puissant et mettant en œuvre le code Mosek. La démarche mise en œuvre dans le cas du matériau poreux de Mohr-Coulomb est décrite en détail dans [84] (où l'on trouvera en références de nombreuses autres applications). Elle abouti notamment à la détermination de bornes numériques rigoureuses de charges limites. L'évaluation du critère établi, sur la base d'une confrontation avec les bornes numériques, a permis d'établir la très bonne qualité des prédictions du critère pour une large plage de porosités et d'angles de frottement interne du matériau poreux. A notre connaissance, ces résultats n'ont pas d'équivalent dans la littérature.

3.2 Extension aux (géo)matériaux nanoporeux

En complément des études réalisées sur les géomatériaux poreux ductiles, nous avons développé des travaux dans le domaine de la plasticité des milieux nanoporeux pour lesquels la prédiction des effets de taille de nanocavités s'avère importante pour de nombreux domaines d'application (ingénierie pétrolière, catalyse, industrie nucléaire, etc.). A titre d'exemple, les mesures de porosimétrie mercure indique des tailles de pores se situant nettement en dessous de la centaine de nanomètres dans l'argilite du Callovo Oxfordien. Cette roche dont des éléments de microstructures peuvent être trouvés dans [91], est envisagée comme hôte du futur stockage souterrain de déchets radioactifs. Compte tenu des enjeux multiphysiques pour cette roche (comportements thermo-hydrromécaniques couplés, évaluation de propriétés de transport (perméabilité, diffusion moléculaire), la prise en compte de la microstructure dans les modèles de calcul s'avère cruciale. C'est aussi l'une des raisons qui ont en partie motivé notre intérêt pour la plasticité des nanoporeux. Les travaux très succinctement décrits ici ont fait partie de de la thèse de S. Brach, réalisée en cotutelle avec l'Université de Rome (Torvergata). Ils ont été menés suivant deux axes qui ont été particulièrement développés :

- Simulations par Dynamique moléculaire qui, à défaut d'une caractérisation expérimentale, apparaissent tout à fait indispensables pour la compréhension des mécanismes (énergies de surface) en jeu aux très petites échelles et pour la quantification des effets de taille de nanopores. Bien que les outils de simulations atomistiques mis en œuvre soient classiques, le caractère multiaxial des investigations menées a permis une caractérisation complète des surfaces de plasticité en 3D et leur dépendance avec la taille des cavités. L'influence des trois invariants de contrainte ainsi que les effets de taille de cavités sur les surfaces de résistance du nanoporeux ont ainsi pu être déterminés. Le lecteur intéressé par ces simulations peut se référer à [11].
- Modélisation théorique des propriétés de rupture de système nanoporeux et prédictions des effets de taille. En s'appuyant sur la compréhension acquise à travers les simulations moléculaires, un modèle complet a été bâti en mettant à nouveau en œuvre l'approche par analyse limite. L'extension aux nanoporeux a consisté à l'incorporation d'interfaces imparfaites cohérentes sur le bord des nanocavités. Les difficultés de calcul, particulièrement importantes dans ce contexte,

ont pu être surmontées en reprenant les méthodes de minimisation sous contrainte non-linéaire d'inégalité. Les prédictions du modèle ont été très positivement évaluées dans un contexte large incluant la matrice plastique de type Mohr-Coulomb (voir [12]).

4 Conclusion

Dans cette communication, nous avons souhaité montrer quelques apports des méthodes de changement de changement d'échelle à l'analyse des comportements de géomatériaux, et notamment de roches quasi fragiles ou ductiles poreuses.

S'agissant des milieux quasi fragiles, la contribution des méthodes de changement d'échelle est encore partielle. D'important efforts doivent être portés sur la formulation de lois d'évolution plus physiquement documentées. Les lois d'endommagement régularisées sont au cœur des recherches actuelles menées par de nombreuses équipes, avec des préoccupations portant sur la prédiction de la rupture.

Pour ce qui concerne les roches ductiles, l'extension des modèles brièvement évoqués ici aux milieux saturés (par un fluide sous pression) ne posent pas de difficultés particulière. La raison en est que dans les situations considérées (matrice plastique de type von Mises, Drucker-Prager ou Coulomb) des résultats d'existence d'une contrainte effective (regroupement de la contrainte et de la pression p) sont disponibles. Un point de grande importance que nous n'avons pas du tout évoqué dans ce texte est celui concernant les effets de forme de cavité qui sont assez bien modélisés en poroplasticité des métaux pour des fins applicatives (cf. par exemple Morin et al. [77] et les références qui y sont). On mentionnera la récente tentative faite dans [93] pour considérer des cavités sphéroïdales dans le contexte d'un géomatériau dont la matrice obéit à un critère du type Drucker-Prager.

Enfin, la modélisation du comportement non linéaire des roches ductiles poreuses a été abordée ici en s'appuyant sur des approches d'analyse limite. Dans le contexte de l'homogénéisation non linéaire, il peut s'avérer important de bien décrire le couplage entre élasticité et plasticité, et l'effet des écrouissements ; c'est le cas par exemple lorsqu'on s'intéresse aux réponses du matériau poreux sous chargements cycliques. Pour ces aspects, il serait plus approprié de traiter directement le problème d'homogénéisation non linéaire dans lequel les matériaux hétérogènes considérés seront de fait considérés comme des composites dont les constituants auront leur comportement dissipatif spécifique. Les approches incrémentales variationnelles, introduites par Lahellec et Suquet [57], [58], sont tout à fait indiquées pour cela. C'est un sujet sur lequel nous réfléchissons dans le cadre de la thèse d'A. Lucchetta, en collaboration avec F. Auslender et M. Bornert [68] (voir également la communication [69] dans cette édition du Congrès Français de Mécanique).

Pour finir, il importe d'évoquer les questions de rupture et de fracturation dans les roches poreuses, pour lesquelles la caractérisation des mécanismes d'amorçage et de propagation de fractures est de grande importance. Pour ce qui concerne les propriétés de rupture de l'argilite du Callovo Oxfordien, en laboratoire et/ou in situ, nous renvoyons le lecteur intéressé aux communications [1] et [59] dans cette édition du Congrès Français de Mécanique.

5 ANNEXE : Sur les matériaux standard généralisés

Il peut être surprenant de démarrer ici par une section dédiée aux matériaux standard généralisés. La raison principale est que bien que les lois de comportement de roches que nous présenterons soient issues d'approches par changement d'échelle, elles seront presque systématiquement replacées dans un cadre thermodynamique (de nature phénoménologique), voir soutenues par celui-ci. On se place

systématiquement en hypothèse de petites perturbations et en condition isotherme.

A cette fin, on rappelle qu'a priori les comportements mécaniques des matériaux auxquels on s'intéresse sont décrits à l'aide de :

- Un potentiel thermodynamique convexe, fonction de la déformation ε et de variables internes, notées ici α , décrivant les phénomènes irréversibles (plasticité, endommagement, etc..) :

$$\rho w(\varepsilon, \alpha) \quad (25)$$

d'où l'on déduit les lois d'état donnant les forces conjuguées (réversibles)

$$\sigma^{rev} = \rho \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}; \quad \mathcal{A}_\alpha^{rev} = \rho \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (26)$$

L'inégalité classique de Clausius-Duhem, traduisant la positivité de la dissipation intrinsèque \mathcal{D} associée aux évolutions irréversibles s'écrit

$$\mathcal{D} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \dot{w} \geq 0 \quad (27)$$

d'où il vient

$$\mathcal{D} = \left(\sigma - \rho \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \rho \frac{\partial w}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (28)$$

En considérant uniquement des processus de déformations non visqueuses, ε est non dissipatif.

Il vient que la force irréversible correspondante $\sigma^{irr} = \sigma - \rho \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = \sigma - \sigma^{rev}$ est alors nulle, ce qui donne

$$\sigma = \sigma^{rev} = \rho \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \quad (29)$$

De plus, à partir de (28), on note que la partie irréversible de la force associée à α est donnée par :

$$\mathcal{A}_\alpha = -\rho \frac{\partial w}{\partial \alpha} = -\mathcal{A}_\alpha^{rev} \quad (30)$$

et la dissipation intrinsèque (28) sous la forme

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}_\alpha \dot{\alpha} \quad (31)$$

- Un pseudo-potentiel de dissipation $\varphi(\dot{\alpha}; \varepsilon, \alpha)$, donnant les expressions des forces irréversibles (lois complémentaires) :

$$\mathcal{A}_\alpha \in \partial \varphi(\dot{\alpha}; \varepsilon, \alpha) \quad (32)$$

dans laquelle ∂ représente le sous-différentiel φ en $\dot{\alpha}$. On notera que dans l'expression du pseudo-potentiel de dissipation ε et α n'apparaissent que comme des paramètres de l'état⁸ et autorise donc la présence des variables d'état dans l'expression du pseudo-potentiel ou de son dual.

Il peut être plus convenable de considérer le pseudo-potentiel dual $\varphi^*(\mathcal{A}; \varepsilon, \alpha)$, fonction convexe des forces irréversibles obtenue par transformée de Legendre-Fenchel de $\varphi(\dot{\alpha}; \varepsilon, \alpha)$. Les lois d'évolution se présentent alors sous la forme :

$$\dot{\alpha} \in \partial \varphi^*(\mathcal{A}; \varepsilon, \alpha) \quad (33)$$

8. Cette possibilité d'extension du cadre classique, initialement absente de [47], est suggérée dans [79] (voir également [72]).

En général, pour les comportements indépendants du temps considérés ici, φ^* est la fonction indicatrice du domaine d'élasticité. Les lois d'évolution conduisent alors à la règle dite de normalité.

Références

- [1] AbdulMajid, M., Ponson, L. Characterisation of the mechanical properties of Callovo-Oxfordian claystone in laboratory and in-situ conditions. Actes du 24e Congrès Français de Mécanique, 2019, Brest.
- [2] Amor, H., Marigo, J.-J., Maurini, C. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : numerical experiments. *J. Mech. Phys. Solids* 57 (8), 1209–1229, 2009.
- [3] Andrieux, S., Bamberger, Y., Marigo, J.J. Un modèle de matériaux microfissuré pour les roches et les bétons , *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, No. 5, 471-513, 1986.
- [4] Anoukou, K., Pastor, F., Dufrenoy, P., Kondo, D., Limit analysis and homogenization of porous materials with Mohr–Coulomb matrix. Part I : theoretical formulation. *J. Mech. Phys. Solids*, 91(2016), 145–171.
- [5] Barthelemy, J.F., Dormieux, L., Kondo, D.. Détermination du comportement macroscopique d'un milieu à fissures frottantes. *C.R. Mécanique*, 331, 77-84, 2003
- [6] Bazant, Z.P., Pijaudier-Cabot, G.. Measurement of characteristic length of non local continuum. *ASCE J. Engrg. Mech.*, 115 : 755-769, 1989.
- [7] Bignonnet F., Dormieux L., and Kondo D., A micro-mechanical model for the plasticity of porous granular media and link with the Cam clay model. *International Journal of Plasticity*, 2016. 79 : p. 259–274.
- [8] Biot M. A. (1941), General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12, 155–164.
- [9] Bouby, C. and D. Kondo. Sur le cadre thermodynamique de quelques modèles de plasticité de milieux poreux ductiles. Actes du 23e Congrès Français de Mécanique, 2017, Lille.
- [10] Bourdin, B., Francfort, G. A., Marigo, J.-J. Numerical experiments in revisited brittle fracture *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 (2000), 797–826.
- [11] Brach, S., Dormieux, L., Kondo, D., Vairo, G. A computational insight into void-size effects on strength properties of nanoporous materials, *Mechanics of Materials*, 101 (2016), 102–117.
- [12] Brach, S., Anoukou K., Dormieux, L., Kondo, D., Vairo G., Limit analysis and homogenization of nanoporous materials with a general isotropic plastic matrix. *International Journal of Plasticity*, 105 (2018), 24-61.
- [13] Bristow, J. R. Microcracks, and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals. *Brit. J. Appl. Physics* 11, 81 (1960).
- [14] Budiansky, B. and O'Connell, J.R. Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, 12 : 81-97, 1976.
- [15] Carpiuc-Prisacari, A., Poncelet, M., Kazymyrenko K., Leclerc, H., Hild, F. A complex mixed-mode crack propagation test performed with a 6-axis testing machine and full-field measurements. *Engineering Fracture Mechanics* 176 (2017) 1-22

- [16] Cazacu, O., Revil-Baudard, B., Chandola, N., Kondo, D. New analytical criterion for porous solids with Tresca matrix under axisymmetric loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 2014. 51(3–4) : p. 861-874.
- [17] Chaboche, J.-L. Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with active/passive unilateral condition, *International Journal of Damage Mechanics*, No. 1, 148-171, 1992.
- [18] Cheng, L., Jia, Y., Oueslati, A., de Saxcé, G., Kondo, D. A bipotential-based limit analysis and homogenization of ductile porous materials with non-associated Drucker–Prager matrix. *J. Mech. Phys. Solids*, 77 (2015), 1-26.
- [19] Comi, C. A non-local model with tension and compression damage mechanisms, *Eur. J. Mech. A Solids* 20 (2001) 1–22
- [20] Cormery, F., Welemene, F. A critical review of some damage models with unilateral effect., *Mechanics Research Communications*, Vol. 29, p.391-395, 2002.
- [21] Coussy, O. Poromechanics, John Wiley and Sons, New York, 2004.
- [22] Curnier, A., He, Q.-C., Zysset, P. Conewise linear elastic materials. *J. Elasticity*, 37 : 1-38, 1995.
- [23] Desrues, J., Andò, E., Mevoli, F.A., Debove, L. and Viggiani, G. How does strain localise in standard triaxial tests on sand : Revisiting the mechanism 20 years on. *Mechanics Research Communications* 92 (2018) 142–146.
- [24] Dormieux, L., Kondo, D., Ulm, F.-J. A micromechanical analysis of damage propagation in fluid-saturated cracked media. *Comptes Rendus Mécanique*, 334, 440-446, 2006
- [25] Dormieux, L. Kondo, D. and Ulm, F.-J. *Microporomechanics*, Wiley, 2006
- [26] Dormieux, L., Kondo, D. Stress-based estimates and bounds of effective elastic properties : the case of cracked media with unilateral effects. *Comput. Mater. Sci.* 46, (2009), 173-179.
- [27] Dormieux, L., Kondo, D. An extension of Gurson model incorporating interface stress effects, *International Journal of Engineering Science*, 48 (2010), 575–581.
- [28] Dormieux, L. Kondo, D., *Micromechanics of fracture and damage*, Iste-Wiley,
- [29] Dragon, A., Halm, D. *Damage Mechanics. Some modelling challenges*, *Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Science, Editeur : IPPT PAN, Warsaw, Poland*, 2004.
- [30] Drucker, D.C., Prager, W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Q. Appl. Math.* 10, 1952, 157–165.
- [31] Drucker, D.C., Prager, W. and Greenberg, M.J. Extended limit analysis theorems for continuous media, *Q. Appl. Math.* 9 (1952) 381–389.
- [32] Drugan, W. and Willis, J. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids* 44, 1996, 497-524.
- [33] Ehrlacher, A. Les matériaux à dissipation simple, Actes du 7e Congrès Français de Mécanique, 1985, Bordeaux.
- [34] Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the Royal Society, Series A*, Vol. 241, 376-396, 1957.
- [35] Fedelich, B., Ehrlacher, A. Sur l'évolution des matériaux à dissipation simple, 23^{ème} G. F. R. , 1988, Bordeaux.

- [36] Francfort, G.A., Marigo, J.-J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*. 46 (8), 1998, 1319–1342.
- [37] Gambarotta, L., Lagomarsino, S.. A microcrack damage model for brittle materials. *Int. J. Solids Structures*, 30(2) : 177-198, 1993.
- [38] Germain P., Nguyen Q.S. and Suquet P. Continuum thermodynamics, *Trans. of the ASME*, vol 50, pp 1010-1020, 1983.
- [39] Goidescu, C., Welemene, H., Kondo, D. Microcracks closure effects in initially orthotropic materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids* 37, (2013), 172–184.
- [40] Goidescu, C., Welemene, H., Pantale, O., Karama, M., Kondo, D. Anisotropic unilateral damage with initial orthotropy : A micromechanics-based approach. *International Journal of Damage Mechanics* 2015, Vol. 24(3), 313–337.
- [41] Guo, T.F., Faleskog, J., Shih, C.F. Continuum modeling of a porous solid with pressure-sensitive dilatant matrix. *J. Mech. Phys. Solids* 56, 2008, 2–15.
- [42] A.L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I. - Yield criterion and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 (1977), 2–15.
- [43] Haimson B., Chang, C. A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of Westerly granite, *Int. Journ. of Rocks Mechanics and Min. Sci.*, Vol.37, 285-296, 2000.
- [44] Halm, D., Dragon, A. A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol.5, 384-402, 1996.
- [45] Halm, D., Dragon, A. An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials *Eur. J. Mech., A/Solids*, 17, 439-460, 1998
- [46] Halm, D., Dragon, A., Charles, Y. A modular damage model for quasi-brittle solids - interaction between initial and induced anisotropy. *Arch. Appl. Mech.* 72, 2002, 498-510.
- [47] Halphen B. and Nguyen Q.S. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique*, vol. 14, no1, pp 39-63, 1975.
- [48] He, Z., Dormieux, L., Lemarchand, E., Kondo, D. Cohesive mohr-coulomb interface effects on the strength criterion of materials with granular-based microstructure. *Eur. J. Mech. A/Solids* 42, 2013, 430-440.
- [49] Hill, R. On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point, *Philos. Mag.* 42 (1951) 868–875.
- [50] Homand, F., Hoxha, D., Belem, T., Pons, M-N., Hoteit, N. Geometric analysis of damaged microcracking in granites. *Mechanics of Materials* 32, 361-376, 2000.
- [51] Horii, H., Nemat-Nasser, S. Overall moduli of solids with microcracks : load induced anisotropy, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 31, 155-171, 1983.
- [52] Jeong, H.Y., Pan, J., 1995. A macroscopic constitutive law for porous solids with pressure-sensitive matrices and its applications to plastic flow localization. *J. Mech. Phys. Solids* 39, 1385–1403.
- [53] Jeong, H.Y., 2002. A new yield function and a hydrostatic stress-controlled model for porous solids with pressure-sensitive matrices. *J. Mech. Phys. Solids* 32, 3669–3691.

- [54] Kachanov, M. Elastic solids with many cracks and related problems, *Advances in Applied Mechanics*, No. 30, 259-445, 1993.
- [55] D. Kondo, H. Welemene, and F. Cormery. Basic concepts and models in continuum damage mechanics. *Rev. Eur. Génie Civil*, 11 :927–943, 2007.
- [56] Krajcinovic, D. Damage mechanics, *North-Holland, Amsterdam, The Netherlands*, 1996.
- [57] Lahellec N., Suquet P. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :1932–1963, 2007.
- [58] Lahellec N., Suquet P. Effective response and field statistics in elasto-plastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non radial loading. *International Journal of Plasticity*, 42 :1–30, 2013.
- [59] Lebihain M., Bornert M., Leblond, J.B., Ponsou, L. Mécanique de la rupture fragile en milieux hétérogène : trajectoire, ténacité effective et material design. Actes du 24e Congrès Français de Mécanique, 2019, Brest.
- [60] Leblond J-B. Mécanique de la rupture fragile et ductile. *Hermes Edition*, 2001.
- [61] Leblond J-B., Kondo D., Morin L. and Remmal M. Classical and sequential limit analysis revisited. *Comptes Rendus Mécanique*, 346 (2018), 336-349
- [62] Leguillon, D., Sanchez-Palencia, E.. On the Behaviour of a cracked elastic body with or without friction. *J. de Mécanique Théorique et appliquée*, 1(2) : 195-209, 1982.
- [63] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. Mécanique des matériaux solides. Dunod, Paris, 1988.
- [64] Levasseur, S., Welemene, H., Kondo D. A microcracks-induced damage model for initially anisotropic rocks accounting for microcracks closure. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* (2015) 77, p. 122–132.
- [65] Liao, J.J., Yang, M.T., Hsien, H.Y. Direct tensile behavior of a transversely isotropic rock. *Int J Rock Mech Min Sci.*, 1997 ; 34 (5), 837–49.
- [66] Lorentz, E. and Andrieux, S. A variational formulation for nonlocal damage models. *International Journal of Plasticity* 15 (1999), 119-38
- [67] Lorentz E. A nonlocal damage model for plain concrete consistent with cohesive fracture. *International Journal of fracture*, 207, 123-159, 2017
- [68] Lucchetta A., Auslender F., Bornert M., Kondo D. A double incremental variational procedure for elastoplastic composites with combined isotropic and linear kinematic hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 158 :243–267, 2018.
- [69] Lucchetta A., Auslender F., Bornert M., Kondo D. Une double procédure incrémentale variationnelle pour les matériaux composites élasto-(visco)-plastiques avec écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope. Actes du 24e Congrès Français de Mécanique, 2019, Brest.
- [70] Maalej, Y., Dormieux, L., Sanahuja, J., 2009. Micromechanical approach to the failure criterion of granular media. *Eur. J. Mech. A/Solids* 28, 647-653.
- [71] Maghous, S., Dormieux, L., Barthélémy, J.F., 2009. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials. *Eur. J. Mech. A—Solids* 28, 179–188.
- [72] Maitournam, H. Matériaux et structures anélastiques. Edition de l’Ecole Polytechnique, 2017.
- [73] Marigo, J.J. Formulation d’une loi d’endommagement d’un matériau élastique, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences Paris*, II , Vol. 292, 1309-1312, 1981.

- [74] Marigo J. J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic materials by growth of microvoids. *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 21, No. 4, pp. 861-874, 1985.
- [75] Mauge, C., Kachanov, M. Effective elastic properties of anisotropic materials with arbitrarily oriented cracks. *J. Mech. Phys. Solids* 42, 1994, 1-24.
- [76] Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. . Continuum damage theory-application to concrete. *J. Engng Mech. ASCE* 115, 345-365, 1989.
- [77] Morin, L., Leblond, J. B., Mohr, D., Kondo D. Prediction of shear-dominated ductile fracture in a butterfly specimen using a model of plastic porous solids including void shape effects, *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2017. 61 : p.433.
- [78] Mroz, Z. Non-associated Flow Laws in Plasticity. *Journal de Mécanique*, 2, 1963, 21-42.
- [79] Nguyen Q.S. Stabilité et mécanique non linéaire de la rupture, Hermès Science Publications, 2000.
- [80] Nguyen Q.S. Quasi-static responses and variational principles in gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 97 (2016) 156–167
- [81] Nguyen, T.T. , Yvonnet, J., Bornert, M. and Chateau C. Initiation and propagation of complex 3D networks of cracks in heterogeneous quasi-brittle materials : Direct comparison between in situ testing-microCT experiments and phase field simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 95 (2016) 320–350
- [82] Oliver-Leblond C., Dumontet H., and Kondo D. A micro-mechanics based strain gradient damage model : formulation and solution for the torsion of a cylindrical bar. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2016. 56 : p. 19–30.
- [83] Olszak, W. and Suklje, L.. Limit analysis and rheological approach in soils mechanics. Cism courses, Springer-Verlag, Wien,1978
- [84] Pastor, J.F., Anoukou, K., Pastor, J., Kondo, D. Limit analysis and homogenization of porous materials with Mohr-Coulomb matrix. Part II : numerical bounds and assessment of the theoretical model. *J. Mech. Phys. Solids* 91, 2016, 14–27.
- [85] Pensée, V., Kondo, D., Dormieux, L. Three-dimensional micromechanical approach of brittle anisotropic damage and related issues, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 128, No. 8, 889-897, 2002.
- [86] Pham, K., Marigo, J.-J. Approche variationnelle de l'endommagement : I. Les concepts fondamentaux. *C.R. Mécanique* 338 (4), 191–198, 2010.
- [87] Pham K., Amor H., Marigo, J-J. and Maurini, C. Gradient Damage Models and Their Use to Approximate Brittle Fracture. *Int. J. Damage Mech.* (2011), 20, 618–652.
- [88] Plesha M.E.. Constitutive models for rock discontinuities with dilatancies and surface degradation. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 11 : 345-362, 1987.
- [89] Ponte Castañeda P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :1757–1788, 1991.
- [90] Ponte-Castaneda, P., Willis, J. R. The effect of spatial distribution on the behavior of composite materials and cracked media, *Journ. of Mech. and Physics of Solids*, No. 43, 1919-1951, 1995.
- [91] Robinet J.C., Sardini P., Coelho D., Parneix J.C., Prêt D., Sammartino S., Boller E. and Altmann S. Effect of mineral distribution at mesoscopic scale on solute diffusion in a clay-rich rock : Example of the Callovo-Oxfordian mudstone (Bure, France). *Water Resources Research*, 2012. 48

- [92] Salençon, J., 1983. Calcul à la rupture et analyse limite. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- [93] Shen, W.Q., Zhang, J., Shao, J.F., Kondo, D. Approximate macroscopic yield criteria for Drucker-Prager type solids with spheroidal voids. *International Journal of Plasticity* 99 (2017) 221-247
- [94] Shield, R.T. On Coulomb's law of failure in soils. *J. Mech. Phys. Solids* 4, 1955,10–16.
- [95] Schofield, A. and Wroth P., 1968. *Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill.
- [96] P. Suquet. Plasticité et homogénéisation. *Thèse de doctorat d'état, Université de Paris 6*, 1982.
- [97] Suquet, P. Overall properties of nonlinear composites : A modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda non linear variational procedure. *Comptes Rendus Académie de Science de Paris, II B*, 320, 11, 1995, 563–571.
- [98] Suquet, P. (1997). *Continuum micromechanics*. New York : Springer-Verlag.
- [99] Tanné, E., Li T., Bourdin, B., Marigo, J.-J., Maurini, C. Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 110 (2018) 80–99
- [100] Thoré, P., Pastor, F., Pastor, J. and Kondo, D.. Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker-Prager materials under isotropic loadings. *Comptes Rendus Mécanique*, 337, pp. 260-267, 2009
- [101] Wang, L.L., Bornert, M., Héripré, E., Yang, D.S., Chanchole, S. Irreversible deformation and damage in argillaceous rocks induced by wetting/drying. *Journal of Applied Geophysics* 107 (2014) 108–118
- [102] Welemane, H., Cormery, F. Some remarks on the damage unilateral effect modelling for micro-cracked materials , *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 11, 65-86, 2002.
- [103] Xie, S.Y., Shao, J.F. Experimental investigation and poroplastic modelling of saturated porous-geomaterials. *International Journal of Plasticity* 39 (2012) 27–45
- [104] Yang, D.S., Bornert, M., Chanchole, S., Wang, L.L., Valli, P. Gatmiri, B. Experimental investigation of the delayed behavior of unsaturated argillaceous rocks by means of Digital Image Correlation techniques. *Applied Clay Science* 54 (2011) 53–62
- [105] Zhu, Q., Kondo, D., Shao, J.F. and Pensée, V. Micromechanical modelling of anisotropic damage in brittle rocks and application. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 44 (9), 467-477, 2008.